

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

# **НАУКОВІ ЗАПИСКИ**

**Випуск 65**

*Серія:*

***МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ***

Кіровоград – 2006

ББК 22.1я73

НЗ4

УДК 511.2, 512.5, 517-519, 532.5, 336, 681.3

**Наукові записки.** – Випуск 65. – Серія: Математичні науки. –  
Кіровоград: РВВ КДПУ ім В. Винниченка, 2006. – 122.

**ISBN 966-8088-27-8**

Збірник наукових праць є результатом окремих наукових пошуків дослідників теоретичних проблем математики.

#### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

1. Андрієнко В.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
2. Авраменко О.В. – доктор фізико-математичних наук, професор.
3. Волков Ю.І. – доктор фізико-математичних наук, професор  
(відповідальний редактор).
4. Кушнір В.А. – доктор педагогічних наук, професор
5. Петренюк А.Я. – доктор фізико-математичних наук, професор
6. Плічко А.М. – доктор фізико-математичних наук, професор.
7. Романов В.О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент.
8. Філер З.Ю. – доктор технічних наук, професор.
9. Шевчук І.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
10. Яременко Ю.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент  
(відповідальний секретар).

Друкується за рішенням ученої ради  
Кіровоградського державного  
педагогічного університету  
імені Володимира Винниченка  
(протокол № 7 від 27 лютого 2006 р.)

Адреса редакції: 25006, м.Кіровоград, вул. Шевченка, 1,  
кафедра математики, тел. 29-31-33.

**ISBN 966-8088-27-8**

© Кіровоградський державний педагогічний  
університет імені Володимира Винниченка

УДК 532.59

## МОДЕЛЮВАННЯ ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛІ ЦУНАМІ, УТВОРЕНОЇ ЗСУВОМ ВИКРИВЛЕНОГО ДНА

**О.В. Авраменко, Ф.М. Олійник**

Одержано співвідношення для відхилення вільної поверхні для задачі генерації хвиль у рідкому шарі зсувом дна у випадку викривленого рельєфу дна, побудовано профілі хвильових поверхонь.

The formula for free surface elevation in the problem of wave generation in fluid layer in the case of bowed bottom displacement is obtained; the profiles of wave surface are presented.

**Вступ.** Останні десятиріччя позначені інтенсивним дослідженням хвильових процесів в океані, отримані нові результати теоретичного та практичного плану [3]. Виникли нові напрямки, пов'язані з широким застосуванням сучасних комп'ютерних технологій, одним з яких є комп'ютерне моделювання фізичних процесів і наступне порівняння з натурними та експериментальними результатами [4]. На даний час розроблено різноманітні програмні продукти які дають можливість спостерігати процеси генерації, поширення та трансформації поверхневих хвиль. Здебільшого такі програми моделюють плоскі двовимірні хвильові процеси, тому актуальною є проблема побудови розв'язків просторових задач та відповідних анімаційних картин [7]. Ця задача спрощується по мірі розвитку математичного забезпечення ЕОМ, зокрема пакетів символьних обчислень, та обчислювальної техніки взагалі, що дозволяє використовувати при дослідженнях різноманітні чисельно-аналітичні методи та дає змогу отримувати уточнені результати.

Метою роботи є фізико-математичне моделювання хвильових процесів, обумовлених локальним зсувом викривленого дна, на основі аналітичних розв'язків з використання подвійного інтегрального перетворення Фур'є, а також на основі спрощеної моделі процесу поширення хвиль.

**Загальні відомості про хвилі цунамі.** Поширеним видом довгих хвиль є цунамі. Періоди цих хвиль складають від 2 до 200 хвилин, довжини – від декількох десятків до декількох сотень кілометрів, швидкість поширення в глибоких місцях океану досягає швидкості реактивних літаків (800 – 1000 км/год). У відкритому океані хвилі цунамі майже не відчутні для кораблів. Це пояснюється їх малою крутизною при великій глибині води. При підході до берегу висоти хвиль зростають до величезних розмірів (30 – 40 м). Досягаючи берега, хвилі цунамі приносять з собою стихійно лихо. Вони здійснюють руйнівну дію на береги, прибережні будови, супроводжуються людськими жертвами наносять матеріальні збитки. Опис картини цунамі дано в [5].

Цунамі викликаються підводними землетрусами, виверженнями вулканів, падінням в воду уламків скель, різкими змінами атмосферного тиску. Найбільш частою причиною цунамі є землетруси. На земному шарі чітко виділяються дві основні зони землетрусів. Одна з них розташована в меридіональному напрямку і проходить вздовж східних та західних берегів Тихого океану, який оточений підводними горними хребтами. Інша зона утворення землетрусів має широтне положення (Апенніни, Альпи, Карпати, Кавказ, Тянь – Шань). Опис механізму генерації хвиль цунамі при землетрусах дано в [6]. Безпосередньою причиною виникнення цунамі є швидкі зміни рельєфу морського дна, що виникають при землетрусах, викликаючи раптові відхилення поверхні океану від свого рівноважного положення. Деформовані ділянки дна мають достатньо велику протяжність. Спираючись на підняту або опущену ділянку дна стовп води, зважаючи на її малу стисливість і швидкоплинність процесу деформації, також піднімається або опускається, не встигаючи повністю розтектися, і викликає додатне або від'ємне зміщення поверхні. Створене збурення поширюється у вигляді довгих гравітаційних хвиль.

В розвитку хвиль цунамі можна виділити три стадії [2]: 1) формування хвиль під дією викликаючої причини та поширення поблизу місця зародження; 2) поширення хвиль у відкритому океані великої глибини; 3) трансформація, відбиття та руйнування хвиль на материковому шельфі та набігання хвиль на берег.

**Математична постановка задачі та її аналітичний розв'язок.** Аналіз осесиметричної задачі генерації хвиль у рідкому шарі над викривленим дном, що рухається, представлено в [1] та [8]. Розглянемо нову просторову задачу генерації хвиль у рідкому шарі зсувом дна (рис.1).

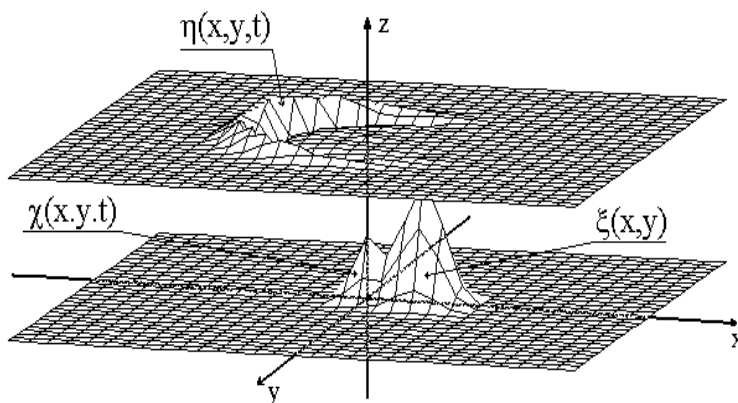


Рис.1. Постановка задачі.

Математична постановка задачі формулюється у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad |x| < \infty, \quad |y| < \infty, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=H} = 0, \quad \eta = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=H}, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=\xi(x,y)} = \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1)$$

$$\varphi(x, y, z, 0) = \frac{\partial \varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \chi(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi(x, y, 0)}{\partial t^2} = 0$$

$\varphi(x, y, z, t)$  - потенціал швидкостей,  $\eta(x, y, t)$  - відхилення вільної поверхні,  $\xi(x, y, t)$  - форма незбуреного дна,  $\chi(x, y, t)$  - відхилення дна відносно незбуреного стану.

Застосуємо до (1) інтегральне перетворення Фур'є по  $x$  та  $y$

$$F(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\omega x} e^{isy} dx dy, \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, s) e^{-i\omega x} e^{-isy} dw ds$$

Отримаємо початково-крайову задачу зі звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \omega^2 \Phi - s^2 \Phi = 0, \quad 0 \leq z \leq H, \quad t > 0$$

$$\left( \frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \frac{d\Phi}{dz} \right)_{z=H} = 0, \quad N = - \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{z=H} \quad \frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z=Z(\omega, s)} = \frac{dK}{dt} \quad (2)$$

$$\Phi(\omega, s, z, 0) = \frac{d\Phi(\omega, s, z, 0)}{dt} = \frac{dK(\omega, s, 0)}{dt} = \frac{d^2 K(\omega, s, 0)}{dt^2} = 0$$

Розв'язавши задачу (2) у просторі образів перетворення Фур'є, після оберненого перетворення отримаємо розв'язок у просторі оригіналів у формі

$$\eta(x, y, t) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\sqrt{\omega^2 + s^2} H} \int_0^t F(w, s, t_1) \cos f(w, s)(t_1 - t) dt_1 - \right. \\ \left. - \frac{e^{\sqrt{\omega^2 + s^2} H}}{\sqrt{\omega^2 + s^2}} \left( \frac{d^2 K(w, s, t)}{dt^2} + \int_0^t F(w, s, t_1) \cos f(w, s)(t_1 - t) dt_1 \right) \right) e^{-i(\omega x + sy)} dw ds, \quad (3)$$

$$\text{де} \quad f(\omega) = \frac{\omega (e^{2\sqrt{\omega^2 + s^2} H} - e^{2\sqrt{\omega^2 + s^2} Z(\omega, s)})}{e^{2\sqrt{\omega^2 + s^2} H} + e^{2\sqrt{\omega^2 + s^2} Z(\omega, s)}}$$

$$F(\omega, t) = - \frac{e^{(2\sqrt{\omega^2 + s^2} H - \sqrt{\omega^2 + s^2} Z(\omega, s))}}{e^{2\sqrt{\omega^2 + s^2} H} + e^{\sqrt{\omega^2 + s^2} Z(\omega, s)}} \left( \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + s^2}} \frac{d^3 K(\omega, t)}{dt^3} + \frac{dK(\omega, t)}{dt} \right)$$

Введення в умову задачі ускладнення у вигляді донного рельєфу робить кінцеву формулу складною для обчислень.

**Побудова спрощеної моделі.** Виникла необхідність побудувати спрощену модель, яка б відтворювала основні властивості хвильового процесу. Нами побудована така модель, яка дає задовільні результати для великих значень часу. Для цього ще до переходу у простір оригіналів зі спектру хвильової поверхні було видалено інформацію, яка описує поведінку хвилі при малих значеннях часу. Проаналізувавши спектр хвильової поверхні, вдалося описати поведінку спектру при великих значеннях часу за

допомогою елементарних функції. Спектр сферичної хвилі має вигляд  $a\omega^b \exp(-c\omega^d) \sin(e\omega^f t^g)$

Після обернення за інтегральним перетворенням Фур'є на отриманий результат накладаються ефекти згасання та дифракції, які підбираються згідно з відомими експериментальними результатами.

Дифракція для донної дзвоноподібної неоднорідності та зсуву дна аналогічної форми, які зміщені у просторі один відносно одного, проявляється як взаємодія двох сферичних хвиль: генерованої та відбитої від донної неоднорідності. За таких умов розподіл інтенсивності задовольняє закону  $\sin(\varphi(x))/\varphi(x)$ , де функція  $\varphi(x)$  складним чином залежить від геометричних параметрів задачі. Згасання повинно задовольняти лінійному закону, оскільки цей процес залежить від розміру периметру хвильового процесу.

Для отриманого розв'язку було проведено моделювання, побудовано просторово-часові анімаційні картини хвильової поверхні. "Землетрус"

задано у вигляді:  $\chi(x, y, t) = \frac{(ct)^3 e^{-ct}}{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)}$ , "підводну гору" зміщено

відносно початку координат для створення асиметрії:  $\zeta(x, y) = \frac{d}{e + (x-f)^2 + y^2}$ ,

де  $a=b=c=d=e=1, f=4$ . На рис.2 зображено еволюцію розвитку хвиль на вільній поверхні.

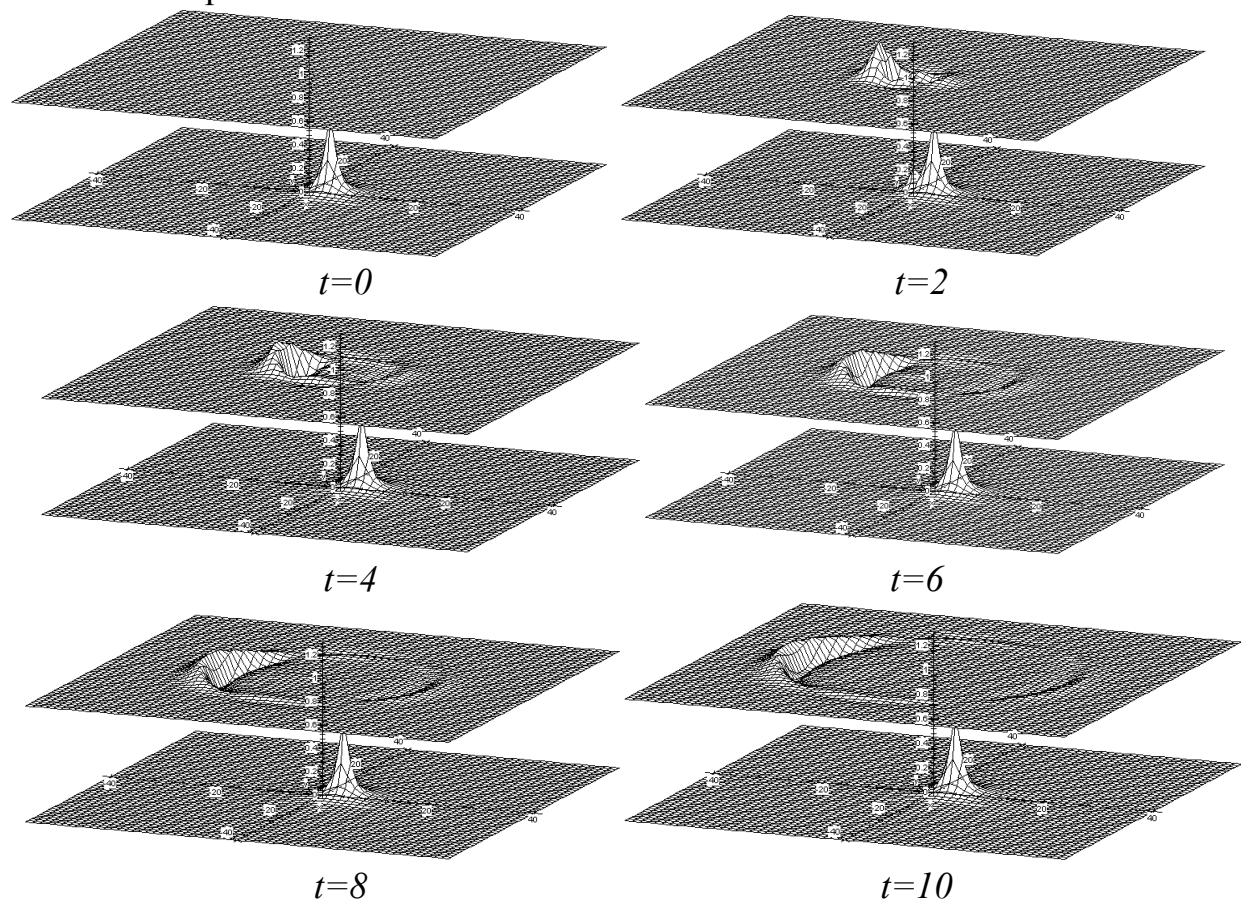


Рис.2 Відхилення вільної поверхні від зсуву викривленого дна у різні моменти часу.

З аналізу просторово часової анімаційної картини можна побачити що на хвильовій поверхні спостерігається явище дифракції генерованої хвилі на донній неоднорідності, чітко спостерігаються головний та побічні дифракційні максимуми та мінімуми.

Характер хвильової поверхні складним чином залежить від параметрів “землетрусу” та “підводної гори”, їх взаємного розташування і швидкості поширення хвиль у середовищі. Донні збурення розглянутого типу здатні створювати напрямлені хвилі великої амплітуди. Якщо розповсюдження інтерференційного максимуму напрямлене в бік берегової лінії, то виникає небезпека виходу великих хвиль на міліну.

**Висновки.** На основі загальних теоретичних відомостей розглянуто задачу про генерацію хвиль над рухомими геометричними неоднорідностями дна при наявності донного рельєфу. Отримано аналітичні розв’язки відхилення вільної поверхні для різних геометричних параметрів донного збурення, для плоскої та просторової задачі. Побудова спрощена модель, яка описує поведінку хвильової поверхні для великих значень часу.

З аналізу еволюції хвильової поверхні на основі спрощеної моделі зроблено висновок, що для землетрусів розглянутого типу практично вся енергія донного імпульсу розподілена несиметрично і сконцентрована в області інтерференційного максимуму. За наявності донного рельєфу внаслідок взаємодії хвиль, дифрагованих на неоднорідностях донного рельєфу, хвильова поверхня набуває вигляду складної інтерференційної картини, на якій можуть утворюватись ділянки з великою магнітудою.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

- [1] Авраменко О.В. Осесиметрична задача генерації хвиль у рідкому шарі над викривленим дном, що рухається // Наукові записки КДПУ, Серія: Фіз-мат науки.– Вип.12, 1997.–С.–3–8.
- [2] Гусаков В.К. Обзор работы по проблеме возбуждения волн цунами.– В кн.: Методы расчета возникновения и распространения цунами.– Москва: Наука, 1978.–С.18–29.
- [3] Овсянников В.Л. , Макаренко Н.И. , Налимов В.И. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. – Новосибирск: Наука, 1985. – 318 с.
- [4] Селезов И.Т. , Сидорчук В.Н. , Яковлев В.В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. – К. : Наук. думка, 1982. – 208с.
- [5] Соловьев С.Л. Проблема цунами и ее значение для Камчатки и Курильских островов.–В кн.: Проблема цунами.–Москва: Наука, 1968.–С.7–50.
- [6] Соловьев С.Л. Цунами.–«Земля и Вселенная».–1980,№3.–С.12–16.
- [7] Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. – К.: Наук. думка, 1976. – 364с.
- [8] Олійник Ф.М. Генерація хвиль у рідкому шарі зсувом дна // Дипломна робота. – Кіровоград, 2002.– 51 с.

УДК 336

## ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ФІНАНСОВОГО МЕХАНІЗМУ

**В.В. Аулін, Б.С. Дігтяр, Н.М. Цвігун**

Mathematical model of financial mechanism is built up. The influence of each factor of the model is examined after the example of business enterprises.

Побудована математична модель фінансового механізму. Розглянуто вплив кожного фактора моделі на прикладі підприємства малого бізнесу.

**Вступ.** Фінансовий механізм посідає провідне місце у структурі господарського механізму, оскільки він є основою ціноутворення і базою для індикативного планування. Від ефективності роботи фінансового механізму залежить і стабільність економіки держави. Тому виникає цілком природна проблема оцінки ефективності фінансового механізму. Складові фінансового механізму такі як фінансові методи, фінансові важелі, правове забезпечення, нормативне забезпечення, інформаційне забезпечення не однаковою мірою впливають на його загальне функціонування. Серед складових фінансового механізму найактивнішими є фінансові важелі, які приводяться в дію через відповідні фінансові методи.

**Метою** даної роботи є застосування математичних моделей для розрахунку впливу окремих складових фінансовою механізму на його функціонування в цілому.

**Функція ефективності фінансового механізму та її фактори.** На фінансовий механізм здійснюють вплив п'ять груп факторів, обсяг яких подано в таблиці 1.

Позначимо через  $x_{ik}$  певний фактор, де індекс  $i$  вказує на групу, до якої належить, а індекс  $k$  – на порядок фактора в групі. У фінансовому механізмі, представленому в таблиці 1, перший індекс матиме значення від 1 до 5, а другий індекс фіксує місце в сукупності факторів, що належать до конкретної групи.

Таблиця 1

**Сукупність груп факторів фінансового механізму**

Фінансові методи I група	Фінансові важелі II група	Правове забезпечення III група	Нормативне забезпечення IV група	Інформаційне забезпечення V група
Планування	Прибуток	Закони	Інструкції	Звітні дані підприємств
Прогнозування	Дохід	Укази Президента	Нормативи	Статистичні збірники

Інвестування	Амортизаційні відрахування	Постанови уряду	Норми	Дані одноразових обстежень
Кредитування	Фінансові санкції	Накази і листи міністерств і відомств	Методичні вказівки	Інтернет
Самокредитування	Ціна	Статут юридичної особи (об'єкта господарювання)	Інші нормативні документи	Преса
Самофінансування	Податок			Радіо
Оподаткування	Орендна плата			Телебачення
Система розрахунків	Дивіденди			
Матеріальне стимулювання і відповідальність	Процентні ставки			
Страховання	Дисконт			
Заставні операції	Цільові економічні фонди			
Трансфертні операції	Вклади			
Трастові операції	Пайові внески			
Оренда	Інвестиції			
Лізинг	Котирування валютних курсів			
Факторинг	Форми розрахунків			
Створення фондів	Види кредитів			
Взаємовідносини між об'єктами господарювання, органами державного управління	Франшиза			
	Курси цінних паперів			

Наприклад  $x_{42}$  означає нормативи, тобто фактор, що належить четвертій групи і має другий порядок, а  $x_{210}$ , – дисконт – належить до другої групи і має десятий порядок.

Слід зауважити, що поділ факторів на групи умовний, але він дає можливість певним чином систематизувати ступінь їх впливу.

Функція корисності або ефективності фінансового механізму в даному випадку має вигляд:

$$\varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}), \quad (1)$$

де  $x_{1i}$  – фактори першої групи  $i = 1, \dots, 18$ ;  $x_{2j}$  – фактори другої групи  $j = 1, \dots, 19$ ;  $x_{3s}$  – фактори третьої групи  $s = 1, \dots, 5$ ;  $x_{4m}$  – фактори четвертої групи  $m = 1, \dots, 5$ ;  $x_{5n}$  – фактори п'ятої групи  $n = 1, \dots, 7$ .

Вважається, що функція корисності або ефективності має значення на проміжку  $[0;1]$ . Побудована функція ефективності (1) залежить від 54 факторів. Проводити аналіз в цілому є достатньо складною проблемою.

Розглянемо найпростішу модель функції ефективності – функцію, яка має вигляд:

$$\varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) = \sum_i a_i x_{1i} + \sum_j b_j x_{2j} + \sum_s c_s x_{3s} + \sum_m d_m x_{4m} \sum_n f_n x_{5n}, \quad (2)$$

де  $a_i, b_j, c_s, d_m, f_n$  – невідомі вагові коефіцієнти.

Кожний фактор функції лінійно впливає на загальну ефективність фінансової системи з певною вагою. Очевидно, що найбільший вплив будуть мати ті фактори, вагові коефіцієнти яких будуть додатними. Якщо ваговий коефіцієнт при деяких факторах буде мати від'ємне значення, то це свідчить про негативний вплив фактору на загальну ефективність системи. При складанні оптимальної математичної моделі основною операцією є вибір таких значень факторів, щоб вони були як можна найменшими.

**Аналіз математичної моделі ефективності фінансової системи.** Найефективнішою буде фінансова система з набором факторів, за яких функція ефективності дорівнюватиме одиниці. Слід мати на увазі, що серед сукупності набору факторів може бути один, або більше ніж один, або не бути жодного. Задачу на максимум розв'язують при певних обмеженнях на фактори:

$$\varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) \rightarrow \max. \quad (3)$$

Найменш ефективною буде фінансова система, в якій при певному наборі факторів функція ефективності матиме значення 0. Два набори факторів вважають однаково ефективними, якщо значення їх функції ефективності них збігаються. Набір факторів  $x^{(1)} = \varphi(x_{1i}^{(1)}, x_{2j}^{(1)}, x_{3s}^{(1)}, x_{4m}^{(1)}, x_{5n}^{(1)})$  вважають кращим, ніж набір факторів  $x^{(2)} = \varphi(x_{1i}^{(2)}, x_{2j}^{(2)}, x_{3s}^{(2)}, x_{4m}^{(2)}, x_{5n}^{(2)})$ , якщо значення функція ефективності від першого набору більша, ніж від другого набору факторів.

Можна подати шкалу значень функції ефективності. Шкалою може бути такий набір інтервалів:

$[0; 0,2]$  – зона несприятлива або критична;

$[0,2; 0,8]$  – зона сприятлива;

$[0,8; 1]$  – зона найкращої ефективності.

Вихідним моментом є набір факторів, при якому функція ефективності перебуває у критичній зоні, тоді очевидно, що необхідно поміняти значення

факторів, щоб потрапити у сприятливу зону, а ще ліпше, якщо потрапити в зону найкращої ефективності.

Слід зазначити, що побудова функції корисності є непростим завданням, Цю функцію будують на основі інформації групи висококваліфікованих експертів, які спочатку визначають фактори, що позитивно впливають на ефективність, а потім ті, які мають негативний вплив. На наступному етапі експерти узгоджують вагу суттєвості кожного із факторів. Як підсумок проводять нормування функцію ефективності.

Можлива ситуація, коли вагові коефіцієнти при факторах мають різні значення залежно від величини значення фактору.

Наприклад, якщо  $0 < x_{13} < 5$ , то  $a_3 = 0,02$ , якщо  $5 \leq x_{13} < 10$ , то  $a_3 = 0,03$  і т. д., а може, якщо  $x_{11} < x_{13} < x_{15}$ , то  $a_3 = 0,02$ , а якщо  $x_{15} < x_{13} < x_{17}$ , то  $a_3 = 0,03$  і т.д.

У даному випадку функція ефективності фінансового механізму матиме частково-лінійний вигляд.

Важливим при побудові функції ефективності є виділення лінійно-незалежних факторів, які впливають на її поведінку. Решта факторів буде лінійними комбінаціями попередніх факторів (мультиколінеарність), і до уваги вони братися не будуть.

**Врахування явища мультиколінеарності при уточненні моделі ефективності фінансової системи.** Для того, щоб функція ефективності фінансового механізму економічного суб'єкта була правдоподібною на початковому етапі її побудови, необхідно навчитися реально вводити значення за кожним із впливових факторів. Якщо ж якийсь фактор задається за допомогою кількісних значень, його впорядковують за величиною зростання або спадання. Наприклад, якщо значення фактору  $x_{ik}$  перебуває в інтервалі  $[a;b]$ , а вплив фактору позитивний, тоді порядок визначатиметься –  $x_{ik}^{(1)} < x_{ik}^{(2)}$  ( $x_{ik}^{(2)}$  – кращий ніж  $x_{ik}^{(1)}$ ). За умов негативного впливу фактору значення  $x_{ik}^{(1)}$ , краще ніж  $x_{ik}^{(2)}$ , якщо його модуль менший.

Більш складною вважається ситуація, коли будь-який фактор неможливо задати за допомогою числового значення. У цьому випадку порядок вводять експертним методом. Для цього спочатку визначають усі можливі ситуації, що обумовлює певний фактор, які називають множиною станів фактору. Далі за допомогою експертних оцінок визначають найкращий із заданих станів. Нехай  $X$  множина станів фактору, а найкращий стан –  $x_{ik}^{(1)}$ . Наступний крок полягатиме в тому, щоб на множині  $X = \{x_{ik}^{(n)}\}$  знову знаходять найкращий стан. Слід мати на увазі, що найкращих станів певного рівня може бути декілька. Цю процедуру проводять доти, доки залишиться один або декілька станів, які на думку експертів, є однаково найкращі.

Якщо певний набір факторів  $x_{ik}^{(1)}, x_{ik}^{(2)}, \dots, x_{ik}^{(n)}$ , ваємкорельований, тобто існує неочевидний вплив одного із них на інші, тоді необхідно ввести порядок на даній множині факторів.

Процедура введення порядку аналогічна попередній. Експертним методом визначають можливі стани певних наборів факторів. Після цього на даній множині станів вводять найкращий і т. д. У запропонованій процедурі чітко проглядається операція укрупнення факторів станів  $x_{ik}^{(1)}, x_{ik}^{(2)}, \dots, x_{ik}^{(n)}$ , тобто фактори замінюють значення однією із вищенаведеної множини станів.

Зауважимо, що сукупності факторів можуть змінюватися в певних межах. Тому для порівняння різних сукупностей факторів треба звести їх до одного виміру. Скажімо,  $x_{11}, x_{12}, x_{13}$  змінюються в межах  $[a; b]$  (бажано  $a, b$  вибирати так, щоб відрізок  $[a; b]$  не можна було звузити), тоді, наприклад, лінійним перетворенням  $l_{ab}(x) = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}$  відрізок  $[a; b]$  можна відобразити на відрізок  $[0; 1]$ .

Оскільки фактори з однієї сукупності, що змінюються в однакових межах, як правило, мають одну природу, можна додати загальний ваговий коефіцієнт для цієї сукупності факторів або взагалі обмежитись введенням ваговим коефіцієнтом сукупності. Тобто лінійну модель можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) = & \sum_{s \in S_1} a_s l_{a,b_s} \left( \sum_{i \in s} a_i x_{1i} \right) + \sum_{s \in S_2} b_s l_{a,b_s} \left( \sum_{j \in s} b_j x_{2j} \right) + \sum_{s \in S_3} c_s l_{a,b_s} \left( \sum_{k \in s} c_k x_{3k} \right) \\ & + \sum_{s \in S_4} d_s l_{a,b_s} \left( \sum_{m \in s} d_m x_{4m} \right) + \sum_{s \in S_5} f_s l_{a,b_s} \left( \sum_{n \in s} f_n x_{5n} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $S_l$  – набір множин індексів факторів  $l$ -ї групи. Тому елемент із  $S_l$  – множина індексів факторів, що змінюються в одних межах. Тобто перша група складається з 18 факторів. Їх, у свою чергу, можна поділити на дві підмножини факторів, наприклад  $\{1,3\}$  і  $\{2,5,6,\dots,18\}$  так, що 1 і 3 змінюються в одних межах  $[3; 5]$ , а фактори другої підмножини – у межах відрізка  $[1; 2]$ . Тоді першу суму, що належить до першої групи, матиме вигляд:

$$\sum_{s \in S_1} a'_s l_{a,b_s} \left( \sum_{i \in s} a''_i x_{1i} \right) = a'_{\{1,3\}} l_{35} (a''_1 x_{11} + a''_3 x_{13}) + a'_{\{2,4,5,\dots,18\}} l_{12} (a''_2 x_{12} + a''_4 x_{14} + a''_5 x_{15} + \dots + a''_{18} x_{118}). \quad (5)$$

Зауважимо, по-перше, що оскільки можна визначити область значення функції  $\varphi$ , то можна визначити і відрізок  $[c; d]$  (бажано визначити  $\min \varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n})$ , та  $\max \varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n})$ , який її містить, і далі, вплинувши на  $\varphi$  перетворенням  $l [c; d]$ , отримаємо область значень на відрізку  $[0; 1]$ .

По-друге, за рахунок того, що вагові коефіцієнти при факторах, як було сказано вище, можуть бути частинно-сталими залежно від значень фактору, то запропонована модель (4) є загальним випадком у класі моделей типу, в якій права частина подається у згорнотому вигляді:

$$\varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) = \sum_{i=1}^n g(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}), \quad (6)$$

де  $g \in C(\mathbb{R})$ .

Якщо експертам вдається встановити залежність значень вагових

коефіцієнтів від значень усіх сукупних факторів, то з аналогічних міркувань можна вважати, що така лінійна модель у певному сенсі – найзагальніша функція ефективності в класі неперервних  $n$ -вимірних функцій.

Зрозуміло, що коли на підставі статистики, досвіду тощо, можна виявити певний закон (функцію), що пов'язує групу факторів (наприклад, це може бути мультиплікативний, експоненціальний, логарифмічний тощо), то є сенс об'єднати їх в окремій групі і подати вираз (4) у вигляді цієї функції (закону).

Тоді у загальному вигляді функція набуває вигляду:

$$\varphi(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) = l_{a_g b_g} g(x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) = l_{a_g b_g} \left( \sum_{s \in S_1} a'_s l_{a_s b_s} \left( \sum_{i \in s} a''_i x_{1i} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{s \in S'} \tilde{a}'_s l_{a_s b_s} g_s \left( \bigcup_{i \in s} \{x_{1i}\} \right) + \dots + \sum_{s \in S_5} f'_s l_{a_s b_s} \left( \sum_{n \in s} f''_n x_{5n} \right) + \sum_{s \in S'_5} \tilde{f}'_s l_{a_s b_s} g_s \left( \bigcup_{n \in s} \{x_{5n}\} \right) \right), \quad (7)$$

де  $S'_l$ , вводиться аналогічно  $S_l$ , і є доповненням до всіх індексів факторів, що перебувають у першій групі ( $S'_l \cup S_l = \{1, \dots, 18\}$ ). Тобто множина факторів розбивається на групи, одні з яких належать до тих, що мають однакову область значень і адитивно входять до функції ефективності, а інші входять до відповідних функцій  $g_s$ . Наприклад, якщо  $x_{11}, x_{12}, x_{13}$ , входять мультиплікативно, то  $g_{\{(11);(12);(13)\}}(x_{11}, x_{12}, x_{13}) = x_{11} x_{12} x_{13}$ , яка діє з деякої області  $D \subset \mathbb{R}^{\text{card}(s)}$  на  $\mathbb{R}^{\text{card}(s)}$  – потужність множини  $S$ , тобто це кількість факторів від яких залежить функція  $g_s$ .

Отже, можна зробити висновок, що побудова функції ефективності – складна і творча робота, що залежить від конкретно поставленого завдання, його параметрів, досвіду працівників такого виду діяльності та інших чинників.

**Використання математичних моделей для оцінки фінансової ефективності малого підприємства.** Розглянемо конкретний приклад лінійної функції фінансової ефективності. Для цього спочатку уточнимо деякі характеристики опису цієї моделі. Вважатимемо, що для всіх  $i, k$   $x_{ik} \geq 0$ , а коефіцієнти за факторами можуть бути як додатними, так і від'ємними і мати значення з проміжку  $[0; 1]$ . Очевидно, що фактори, вплив яких на функцію фінансової ефективності позитивний, додатні, а коефіцієнти за факторами із негативним впливом – від'ємні.

Побудуємо лінійну функцію фінансової ефективності малого хлібопекарського підприємства, що працює на орендованому устаткуванні. Зрозуміло, що основними факторами, які впливають на ефективність фінансовою механізмом цього підприємства, будуть: ціна хліба, ефективність використання орендованого устаткування (оренда), планування, орендна плата, заробітна плата (матеріальне стимулювання), амортизаційні відрахування, норми (кількість клейковини у хлібі).

За оцінкою кваліфікованих експертів, виходить, що 30% фінансової ефективності роботи цього підприємства залежить від ціни і т. д. (див. табл. 2).

Таблиця 2

### Характер впливу факторів на фінансову ефективність підприємства

Частка впливу у %	Назва фактору
30%	Ціна
25%	Планування
30%	Оренда
15%	Норми
-10%	Плата за оренду
-15%	Матеріальне стимулювання
-5%	Амортизаційні відрахування

(Знак "-" перед процентами означає, що відповідні фактори негативно впливають на фінансову ефективність роботи фірми).

Зрозуміло, що сума відсотків із додатним знаком має дорівнювати 100%, а сума процентів із від'ємним знаком не повинна за модулем перевищувати процентів із додатним знаком.

Вважаємо, що значення функції фінансової ефективності визначається на відрізку  $[0; 1]$ . Наприклад, якщо максимальний вплив фактору на фінансову ефективність дорівнює 30%, то його максимальний вплив на функцію фінансової ефективності становитиме  $0,3$  і т.д.

Знайдемо значення коефіцієнтів за кожним фактором.

1. *Ціна*. Припустимо, уряд установив максимальну ціну на певний вид хліба 5 грн. Отож для того, щоб ми могли використовувати ціну, виражену у гривнях, нам слід певним чином відкорегувати коефіцієнт, близький до фактору ціни. Тобто, за викладеним вище, максимальний вплив фактору ціни на функцію фінансової ефективності має дорівнювати  $0,3$ . Зрозуміло що цей вплив досягатиметься при ціні на хліб у 5 грн. Отже,  $5 \times S_{ціни} = 0,3 \Rightarrow S_{ціни} = 0,06$  ( $S_{ціни}$  - коефіцієнт близький до фактору ціни). Тоді, користуючись цим коефіцієнтом у функції фінансової ефективності, підставляють в неї реальну ціну хліба у гривнях –  $X_{ціни}$ .

2. *Планування*. Коефіцієнт при плануванні залишиться на позначці  $0,25$ , якщо оцінити фактор планування  $u$  в інтервалі  $[0; 1]$ . Визначимо значення фактору планування так: якщо виходить, наприклад, 56% запланованого, то значення фактору планування буде  $0,56$ . Позначимо значення фактору планування  $X_{план}$ .

3. *Оренда*. Коефіцієнт при оренді –  $0,3$ . Оцінювати значення фактору оренди будемо числом з інтервалу  $[0; 1]$  за ефективністю використання орендованого устаткування. Наприклад, якщо ефективність використання

орендованого устаткування дорівнює 40%, значення фактору оренди буде 0,4. Позначимо значення фактору оренди  $x_{ар}$ .

4. *Норма.* Коефіцієнт при факторі норми – 0,15, а саме значення фактору норми оцінимо числом із проміжку [0; 1]. Отже, якщо уряд дозволив випікати хліб із  $L\%$  клейковини, тоді значення фактору норми буде  $X_{норми} = 1 - L/100$ . Тобто, якщо  $L = 100\%$ , корисний вплив фактору норми буде мінімальний, а, якщо  $L = 0\%$ , корисний вплив цього фактору буде максимальний.

5. *Орендна плата.* Відкоригуємо коефіцієнт при факторі орендної плати так само, як і у випадку фактору ціни з метою визначення реального значення орендної плати в гривнях. Вважаємо, що  $S_{ор. плати} = -0,1 / (\text{повну орендну плату в грн.})$ . Значення фактору орендної плати –  $X_{ор. плати}$  – реальне значення орендної плати в грн.

6. *Амортизаційні відрахування.*  $S_{ам. відр.} = -0,05 / (\text{повну орендну плату в грн.})$ . Коефіцієнт при факторі  $X_{ам. відр.}$  – значення фактору амортизаційних відрахувань у гривнях (реальна кількість амортизаційних відрахувань в гривнях).

7. *Матеріальне стимулювання.* Коефіцієнт при факторі матеріального стимулювання дорівнює  $S_{мат. стим.} = -0,15 / (\text{повне матеріальне стимулювання в грн.})$ . Тоді  $X_{мат. стим.}$  – реальне матеріальне стимулювання.

У результаті лінійна функція фінансової ефективності матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi = & 0,06X_{ціни} + 0,25X_{план} + 0,3X_{оренди} + 0,15X_{норми} \\ & + S_{ор. плати} X_{ор. плати} + S_{ам. відр.} X_{ам. відр.} + S_{мат. стим.} X_{мат. стим.} \end{aligned} \quad (8)$$

Можна розглянути і складніший варіант функції фінансової ефективності:

$$\varphi(t, x_{1i}, x_{2j}, x_{3s}, x_{4m}, x_{5n}) = \sum_i a_i(t)x_{1i} + \sum_j b_j(t)x_{2j} + \sum_s c_s(t)x_{3s} + \sum_m d_m(t)x_{4m} + \sum_n f_n(t)x_{5n} \quad (9)$$

У цій моделі значення функції фінансової ефективності змінюватиметься з плином часу.  $a_i(t)$ ,  $b_j(t)$ ,  $c_s(t)$ ,  $d_m(t)$ ,  $f_n(t)$  – функції коефіцієнтів залежать від часу  $t$  і набиратимуть значення з проміжку [0; 1].

Розглянемо приклад такої функції фінансової ефективності на хлібопідприємства.

Припустимо, в орендній угоді зазначено, що орендна плата з часом буде зменшуватись. Комісія експертів установила, що коефіцієнт, близький до фактору орендної плати, описується законом:

$$S(t)_{ор. плати} = \begin{cases} -0,1 + \alpha \cdot t, & \text{де } \alpha > 0, \text{ коли } -0,1 + \alpha \cdot t < 0 \\ 0, & \text{коли } -0,1 + \alpha \cdot t \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Зрозуміло, що з часом амортизаційні відрахування збільшуються. За експертною оцінкою, встановлено, що їхній процентний вплив на фінансовий механізм змінюється за законом  $-5\% - \beta \cdot t$ , де  $\beta > 0$ . Таким чином, коефіцієнт близький до фактору амортизаційних відрахувань, становитиме

$$S(t)_{ам.відр.} = \begin{cases} \frac{-5\% - \beta \cdot t}{100} \\ \text{Повні амортизаційні відрахування у грн.} \end{cases} \quad (11)$$

Решта коефіцієнтів у функції фінансової ефективності – величини сталі. Отже, маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(t, X_{ціни}, X_{план}, X_{оренда}, X_{норми}, X_{ор.плата}, X_{ам.відр.}, X_{мат.стим.}) = \\ = 0,06 X_{ціни} + 0,25 X_{план} + 0,3 X_{оренда} + 0,15 X_{норми} + \\ + S(t)_{ор.плати} X_{ор.плати} + S(t)_{ам.відр.} X_{ам.відр.} S(t)_{мат.стим.} X_{мат.стим.} \end{aligned} \quad (12)$$

Функція фінансової ефективності (12) має коефіцієнти, що змінюються з часом. Це коефіцієнти, які близькі до факторів амортизаційних відрахувань та орендної плати.

Можна розглянути випадок, коли з часом змінюються тільки фактори, а коефіцієнти залишаються постійними. Тоді функція фінансової ефективності набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x_{1i}(t), x_{2j}(t), x_{3s}(t), x_{4m}(t), x_{5n}(t)) = \\ = \sum_i a_i x_{1i}(t) + \sum_j b_j x_{2j}(t) + \sum_s c_s x_{3s}(t) + \sum_m d_m x_{4m}(t) + \sum_n f_n x_{5n}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

де  $x_{1i}(t), x_{2j}(t), x_{3s}(t), x_{4m}(t), x_{5n}(t)$  – фактори, що залежать від часу.

Розглянемо ще раз функцію фінансової ефективності малого хлібопекарського підприємства. Якщо вважати, що фінансові справи підприємства не дуже добрі, тому заробітна плата зменшилася і описується законом  $X(t)_{мат.стим.} = X_{мат.стим.} t, \alpha > 0$ , де  $X_{мат.стим.}$  – реальне матеріальне стимулювання на момент часу  $t = 0$ .

Тоді функція фінансової ефективності матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi = 0,06 X_{ціни} + 0,25 X_{план} + 0,3 X_{оренда} + 0,15 X_{норми} + \\ + S(t)_{ор.плати} X_{ор.плати} + S(t)_{ам.відр.} X_{ам.відр.} + S(t)_{мат.стим.} X(t)_{мат.стим.} \end{aligned} \quad (14)$$

У цій функції від часу залежить тільки фактор матеріального стимулювання. Найзагальніший вигляд функції фінансової ефективності має вигляд:

$$\varphi(t) = \sum_i a_i(t) x_{1i}(t) + \sum_j b_j(t) x_{2j}(t) + \sum_s c_s(t) x_{3s}(t) + \sum_m d_m(t) x_{4m}(t) + \sum_n f_n(t) x_{5n}(t), \quad (15)$$

де  $a_i(t), b_j(t), c_s(t), d_m(t), f_n(t)$  – функції, обмежені на проміжку  $[0; T]$ , а значення факторів  $x_{ij}(t)$  задовольняють нерівність  $0 \leq x_{ij}(t) \leq x_{ij}$ .

**Висновки.** Показано, що для оцінки ефективності функціонування фінансового механізму слід використовувати різні математичні моделі, які дають змогу швидше знайти оптимальну величину цього показника як на мікрорівні, так і на макрорівні, спрогнозувати бажаний результат впливу фінансовою механізму на економічні показники, вміло і своєчасно маніпулювати необхідними факторами, надавши їм конкретного числового значення.

На прикладі малого підприємства розглянута фінансова ефективність за допомогою лінійної функції факторів, що визначають фінансовий стан.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Финансовый менеджмент: теория и практика / Под ред. Е.С. Стояновой. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Перспектива, 2000. – 656 с.
2. Ващенко Т.П. Математика финансового менеджмента. – М.: Перспектива, 1996. – 80 с.
3. Стоянова Е.А., Стоянов Е.С. Экспертная диагностика и аудит финансово-хозяйственного положения предприятия. – М.: Перспектива, 1992. – 89 с.
4. Финансовый анализ деятельности фирмы. – М.: Крокус Интернейшен, 1992. – 240 с.
5. Згурновський М.З. Вступ до комп'ютерних інформаційних технологій. – К., 2002. – 256 с.
6. Худолій Л.М. Теорія фінансів. – К., 2002. – 168 с.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 25 березня 2006 р.*

УДК 517.9

## ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ

В.М. Бобочко , С.С. Костигін

Вивчається одне нелінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке використовується при асимптотичному інтегруванні сингулярно збуреного диференціального рівняння з осциляційною точкою звороту.

A non-linear differential equation of the first order, used in the asymptotic integration of the singular perturbed differential equation with the oscillatory pivot point is under study.

В теорії сингулярно збурених диференціальних рівняннях (СЗДР) з точками звороту важливе місце займають так звані модельні диференціальні рівняння та диференціальні рівняння для визначення регуляризуючих функцій. Так наприклад, при дослідженні СЗДР з алгебраїчною точкою звороту регуляризуюча функція визначається з диференціального рівняння  $\varphi'^2(x)\varphi(x) = xa(x)$  при початковій умові  $\varphi(0) = 0$ . Це рівняння використовувалось майже у всіх методах, які дозволяли будувати рівномірну асимптотику розв'язку сингулярно збуреної задачі, включаючи і в точці звороту.

При дослідженні СЗДР з осциляційною точкою звороту роль регуляризуючої функції відіграє розв'язок задачі

$$L\varphi(x) \equiv \varphi'^2(x)[a^2 - \varphi^2(x)] = 4(1-x^2)p^2(x), \quad \varphi(0) = 0. \quad (1)$$

Тут  $p(x) > 0$  -- неперервна функція на відрізку  $I = [-1; 1]$ ,  $a$  -- деяке число (параметр).

**Властивість 1.** Нехай  $\varphi_1(x)$  -- розв'язок задачі (1) при  $x \in I$ . Тоді на цьому відрізку розв'язком задачі (1) буде функція  $\varphi_2(x) = -\varphi_1(x)$ .

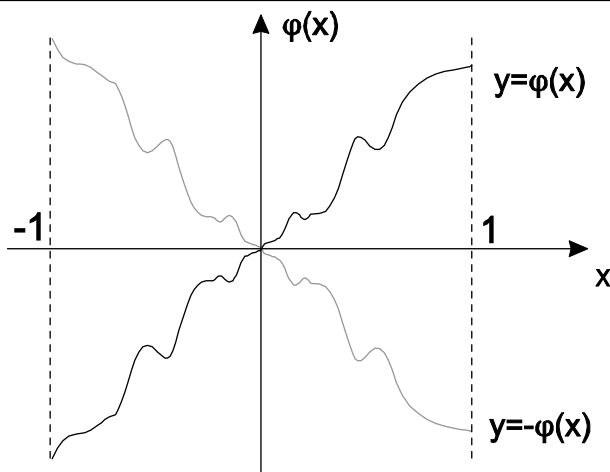
**Доведення.** Оскільки  $\varphi_1(x)$  розв'язок, то  $L\varphi_1(x) \equiv 4(1-x^2)p^2(x)$ . Тоді

$$\begin{aligned} L\varphi_2(x) &= L(-\varphi_1(x)) \equiv \left(-\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 [a^2 - (-\varphi_1(x))^2] \equiv \\ &\equiv \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 [a^2 - (\varphi_1(x))^2] \equiv 4(1-x^2)p^2(x). \end{aligned}$$

**Властивість 2.** Якщо існує хоча б один розв'язок задачі (1), то точка  $x = 0$  є точкою розгалуження розв'язків задачі (1).

**Доведення.** Згідно першої властивості, з існування розв'язку  $\varphi_1(x)$  рівняння (1) випливає існування розв'язку  $\varphi_2(x) = -\varphi_1(x)$ . Оскільки  $\varphi_1(0) = 0$ , то  $\varphi_2(0) = -\varphi_1(0) = 0$ . Властивість 2 доведена.

Схематично ці властивості подана на малюнку.



Побудуємо розв'язок  $\varphi(x)$  задачі (1) на відрізку  $I$ , який буде монотонно зростати при  $x \in I$ , тобто  $\varphi'(x) > 0$  для всіх  $x \in I$ .

**Розв'язання.** Параметр  $a$  у нас поки що невизначений. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$|\varphi'(x)|[a^2 - \varphi^2(x)]^{\frac{1}{2}} = 2p(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Оскільки ми будуємо розв'язок у просторі монотонно зростаючих функцій, то  $|\varphi'(x)| = \varphi'(x)$ , тобто рівняння (2) запишемо у вигляді

$$\varphi'(x)[a^2 - \varphi^2(x)]^{\frac{1}{2}} = 2p(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

або

$$\int_0^{\varphi(x)} [a^2 - \varphi^2(x)]^{\frac{1}{2}} d\varphi = \int_0^x 2p(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (4)$$

Для того, щоб радикал мав дійсні значення, необхідно мати обмеження  $-a \leq \varphi(x) \leq a$ ,  $a > 0$ .

Інтегруючи підінтегральний вираз лівої частини рівності (3) отримаємо рівняння

$$[\varphi \cdot a^2 - \varphi^2(x)]^{\frac{1}{2}} + a^2 \arcsin \frac{\varphi}{a} - f(x) \equiv F(x, \varphi) = 0,$$

де  $f(x) \equiv 4 \int_0^x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx$ .

**Властивість 3.** Нехай рівняння (4) визначає неявно функцію  $\varphi(x)$  в області  $D = \{(x, \varphi), x \in I, -a \leq \varphi(x) \leq a\}$ . Тоді ця функція є розв'язком задачі (1.)

**Доведення:** Продиференціювавши рівність (4), отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dx} \sqrt{a^2 - \varphi^2(x)} = 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x).$$

Зліва та справа маємо невід'ємні вирази. Тому після піднесення до квадрату отримаємо рівняння (1). Оскільки  $F(0,0) = 0$ , то розв'язок  $\varphi(x)$ , якщо він існує, задовольняє умові  $\varphi(0) = 0$ . Властивість 3 доведено.

Нагадаємо, що нам необхідно побудувати монотонно зростаючий розв'язок задачі (1), тобто повинна виконуватися умова  $\varphi'(x) > 0$  для всіх  $x \in I$ .

Для досягнення цієї мети з необхідністю повинна виконуватися умова:  $\varphi^2(\pm 1) = a^2$ .

Можливі варіанти:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varphi(-1) = -a, \quad \varphi(1) = a \\ 2) \quad & \varphi(-1) = a, \quad \varphi(1) = -a. \end{aligned} \quad (5)$$

Згідно теореми Ролля інших умов бути не може.

З умови  $\varphi'(x) > 0$  потрібно вибрати випадок 1), тобто намагатимемось, щоб рівняння (4) задавало неявно функцію  $\varphi(x)$  в області  $D$ , причому таку, щоб виконувалась умова (1), яку можна записати у вигляді

$$F(-1, -a) = 0, \quad F(1, a) = 0. \quad (6)$$

Таким чином, займемось безпосередньо доведенням того, що рівняння (4) задає неявно функцію  $\varphi = \varphi(x)$  в області  $D$ , причому таку, щоб мали місце рівності (6)

Мають місце такі умови.

1) Функція  $F(x, \varphi)$ , як функція двох змінних, визначена і неперервна у прямокутнику  $D$  ;

$$2) \quad F(0, 0) = 0 ; \quad F'_\varphi(x, y) = 2\sqrt{x^2 - \varphi^2(x)} > 0 \text{ для всіх } x \in (-1; 1).$$

Оскільки виконуються умови теореми існування неявної функції, то можна стверджувати, що в деякому околі точки  $x = 0, x \in (-1, 1)$  рівняння (4) задає неявну функцію  $\varphi(x)$ .

Проте нам цього не досить, оскільки нас цікавить існування неявної функції на відрізку  $[-1, 1]$ , тобто включаючи точки  $x = \pm 1$ .

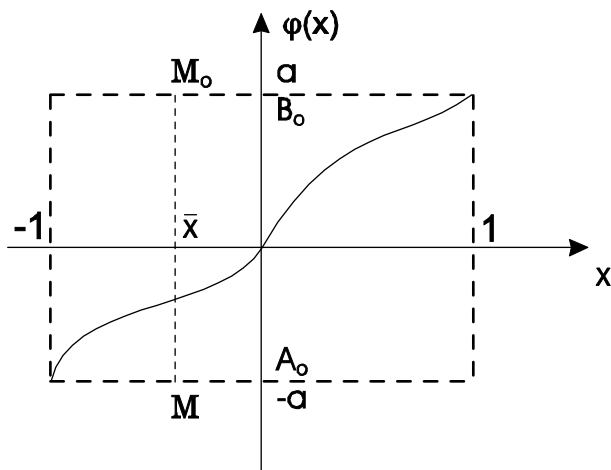
Виходячи з цього, ми проведемо повне доведення існування неявної функції на відрізку  $I$  з необхідними нам умовами (6).

**Теорема.** Нехай

$$a^2 = \frac{8}{\pi} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx.$$

Тоді рівняння (4) в області  $I$  задає неявно функцію  $\varphi(x)$ , яка задовольняє: 1) умовам (6); 2)  $\varphi(0) = 0$  ; 3)  $\varphi(x) \in C[I]$ .

**Доведення:** Схема доведення буде класичною з уточненням в точках  $x \pm 1$ .



Розглянемо функцію  $F(x, \varphi)$  в прямокутнику  $D$ , зображеному на малюнку.

Зафіксуємо  $x_0 = 0$ . Тоді функція  $F(0, \varphi)$ , як функція однієї змінної буде монотонно зростаючою ( $F'_\varphi > 0$ ) і приймати різні знаки в точках  $A_0$  та  $B_0$ , а саме  $F(A_0) < 0$ ,  $F(B_0) > 0$ .

Зафіксуємо  $\varphi = -a$ . Маємо  $F(-1, -a) = 0$ ,  $F(1, a) = 0$ .

Ці функції неперервні по  $x \in I$  та  $F(0, -a) < 0$ , а  $F(0, a) > 0$ . Тому існує  $\delta$ -окіл точки  $x = 0$ , в якому ці функції зберігають знак.

Основна ідея доведення цієї теореми полягає в тому, щоб визначити довільну до цього часу сталу  $a$  таким чином, щоб  $\delta = 1$ , а при  $x = \pm 1$  повинні виконуватись умови (6).

Почнемо з умов (6). Маємо  $F(-1, -a) \equiv -\frac{2}{\pi} a^2 - f(-1) = 0$ , тобто

$$a^2 = -\frac{2}{\pi} f(-1) = \frac{8}{\pi} \int_{-1}^0 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx. \tag{7}$$

З умови  $F(1, a) = 0$  отримаємо

$$a^2 = \frac{8}{\pi} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx. \tag{8}$$

Зрівнюємо праві частини рівностей (7 та (8). Маємо рівність.

$$\frac{8}{\pi} \int_{-1}^0 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx = \frac{8}{\pi} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx. \tag{9}$$

Якщо  $p(x) > 0$  – парна, то має місце рівність (9), а отже ми визначили значення постійної  $a$ , яке обраховується за формулами (7) та (8).

Легко перевірити, що для  $x \in (-1, 1)$  мають місце нерівності

$$F(x, -a) < 0, \quad F(x, a) > 0,$$

де  $a$  визначається формулою (8).

Наприклад:

$$F(x, a) \equiv 4 \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx - 4 \int_0^x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx > 0$$

для всіх  $x \in (-1,1)$ .

Після цього, згідно класичної теореми, зафіксуємо  $x = \bar{x} \in (-1,1)$  та розглянемо вертикальний відрізок  $MM_0$ , з точками  $M(\bar{x}, -a)$ ,  $M(\bar{x}, a)$ .

Функція  $F(\bar{x}, \varphi)$  неперервна по  $\varphi$  для кожного фіксованого  $x \in (-1,1)$ . Отже,  $F(\bar{x}, \varphi)$  – монотонно зростаюча на всьому відрізку  $[-1,1]$ . Оскільки  $F(\bar{x}, -a) < 0 < F(\bar{x}, a)$  для всіх  $\bar{x} \in I$ , то існує єдине  $\varphi = \bar{\varphi}$  таке, що  $F(\bar{x}, \bar{\varphi}) = 0$ . Отже, рівняння (4) при  $x \in I$  задає неявну функцію  $\varphi(x)$ , котра є неперервною на  $I$  та задовольняє умовам

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(-1) = -a, \quad \varphi(1) = a.$$

Теорему доведено.

Нас цікавить не тільки питання існування  $\varphi(x)$ , а і її похідна. Тому необхідно дослідити питання існування  $\varphi'(x)$  на відрізку  $I$ .

З доведення є очевидним, що існує  $\varphi'(x)$  при  $x \in (-1,1)$ , котра обчислюється згідно формули

$$\varphi'(x) = \frac{-F'_x(x, \varphi(x))}{F'_\varphi(x, \varphi(x))} \equiv \frac{f'(x)}{2\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} \equiv \frac{4(1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x)}{2(a^2 - \varphi^2(x))^{\frac{1}{2}}}.$$

Зауважмо, що  $\varphi'(x) > 0$  для всіх  $x \in (-1,1)$ . Отже, ми маємо неперервну на відрізку  $I$ , а відповідно й обмежену, функцію  $\varphi(x)$ , котра монотонно зростає для  $x \in (-1,1)$ . Тому для того, щоб існувала неперервна похідна функції  $\varphi(x)$  для  $x \in I$ , необхідно визначити

$$\varphi'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \varphi'(x), \quad \varphi'(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi'(x).$$

Нам залишилося тільки дослідити питання існування цих границь.

Оскільки функція  $\Psi(x) \equiv \varphi'(x)$  неперервна при  $x \in (-1,1)$ , то виконується одна з умов

$$a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi'(x) = \infty, \quad b) \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi'(x) = A < \infty.$$

Якщо б виконувалась умова а), то функція  $\varphi(x)$  не була б обмеженою в  $I$ .

Тому має місце випадок б). Аналогічно отримаємо, що існує

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \varphi'(x) = B < \infty.$$

Після цього ми зможемо легко знайти ці границі, а сам

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi'^2(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{4(1-x^2)p^2(x)}{a^2 - \varphi^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-8xp^2(x)}{-2\varphi(x)\varphi'(x)}.$$

Звідки отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi'^2(x) = \frac{4p^2(1)}{\varphi(1)} \equiv \frac{4p^2(1)}{a} = \varphi'^2(1).$$

Остаточоно

$$\varphi'(1) = \left( \frac{4p^2(1)}{a} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно отримаємо

$$\varphi'(-1) = \left( \frac{4p^2(-1)}{a} \right)^{\frac{1}{2}} = \varphi'(1).$$

Сформулюємо у вигляді загальної теореми отримані результати.

**Теорема.** Нехай:

1)  $p(x) > 0 \in C[I]$  і парна для  $x \in I$  ;

2)  $a^2 = \frac{8}{\pi} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} p(x) dx$ .

Тоді рівняння  $F(x, \varphi) = 0$  (див. (4)) визначає неявну функцію  $\varphi(x)$  на проміжку  $I$ , яка:

а) є розв'язком задачі (1);

б) існує неперервна похідна  $\varphi'(x) > 0$  для всіх  $x \in I$  ;

в)  $\varphi(-1) = -\varphi(1)$  ;

г)  $\varphi'(-1) = \varphi'(1) = \left( \frac{4p^2(-1)}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$  ;

д) розв'язок  $\varphi(x)$  є непарною функцією.

### БІБЛОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
3. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. – Т. 27, вып. 6(52). – С. 3–96.
4. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90 – P. 113–142.
5. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. V. 226. – P. 227–241.
6. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.
7. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. ур.-ия. – 1991. – Т. 27, 9. – С. 1505–1515.
8. Бобочко В.М. Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, 2. – С. 147–160.
9. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, 10. – С. 1304–1312.

УДК 517.9

## ОДНОРІДНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З СТАБІЛЬНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

**В.М. Бобочко , І.О. Зеленська**

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно-збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи.

A uniform asymptotic of solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the spectrum of face operator consists of multiple and zero elements.

Вступ. Розглянемо сингулярно збурене диференціальне рівняння (СЗДР) вигляду

$$\varepsilon^2 y''''(x, \varepsilon) + x \tilde{a}(x) y'(x, \varepsilon) + b(x) y(x, \varepsilon) = 0, \quad (1)$$

де  $\varepsilon > 0$  – малий параметр,  $a(x) \equiv x \tilde{a}(x)$ ,  $b(x)$  – необмежено диференційовні функції на відрізку  $[0; 1]$ , тобто рівняння з диференціальною точкою звороту.

Рівняння (1) будемо досліджувати за умови, що

$$\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0. \quad (2)$$

Умови (2) забезпечать стабільність точки звороту та існування досить гладкого загального розв'язку виродженого рівняння

$$x \tilde{a}(x) \omega'(x) + b(x) \omega(x) = 0. \quad (3)$$

Сингулярно збурене диференціальне рівняння Ліувілля з алгебраїчною точкою звороту вивчене досить детально (див. [1-9]). Розроблено декілька методів побудови рівномірної асимптотики розв'язку цього рівняння на всьому відрізку  $[0; 1]$ .

Рівномірна асимптотика розв'язку СЗДР з диференціальною точкою звороту в основному побудована тільки для рівняння третього порядку (див. [8-10]).

У [8-10] досліджено СЗДР (1) за виконання різних умов на коефіцієнти  $a(x), b(x)$ , причому випадок, коли справедливі умови (2), розглянуто у [8]. В залежності від цих умов точка звороту була стабільною [8-9], або нестабільною [10]. В [8-10], метод розроблений для рівняння Ліувілля [9], узагальнено на побудову рівномірної асимптотики розв'язку СЗДР (1).

Питання про побудову рівномірної асимптотики розв'язку системи двох рівнянь, що відповідає рівнянню Ліувілля, досліджувалось В. Вазовим. Проте, як сказано самим Вазовим ([2], стор. 67), тільки для рівняння другого порядку розроблена деяка теорія, але і вона далеко не повна, нерозв'язаних питань залишилось значно більше, ніж розв'язаних. Дослідження систем СЗДУ з диференціальною точкою звороту авторам невідомі.

Виходячи із сказаного є сенс узагальнити результати, отримані в [8-10] для СЗДР (1) на випадок системи СЗДР.

1. Система диференціальних рівнянь з стабільною диференціальною точкою звороту

Запишемо рівняння (1) у вигляді системи. Для цього введемо нові змінні

$$y = y_1, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y_1'' = \varepsilon y_2' = y_3,$$

$$\varepsilon^2 y''' = \varepsilon(\varepsilon y''') = \varepsilon(\varepsilon y_1''') = \varepsilon(y_2'') = \varepsilon(y_3').$$

Отже, диференціальне рівняння (1) зводиться до наступної системи СЗДР:

$$\begin{cases} \varepsilon y_1'(x, \varepsilon) - \varepsilon y_2(x, \varepsilon) = 0 \\ \varepsilon y_2'(x, \varepsilon) - y_3(x, \varepsilon) = 0 \\ \varepsilon y_3'(x, \varepsilon) + x\tilde{a}(x)y_2(x, \varepsilon) + b(x)y_1(x, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у векторному вигляді. Маємо систему

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = 0. \quad (1.1)$$

Тут

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

– відома матриця, тобто

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(x, \varepsilon) \\ y_2(x, \varepsilon) \\ y_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix} -$$

шукана вектор-функція.

В цій роботі буде побудована рівномірна асимптотика розв'язку (РАР) системи (1.1) на відрізку  $[0;1]$  за умови наявності в цій системі точки звороту  $x=0$ .

Характеристичне рівняння системи (1.1) має вигляд:

$$|A(x, 0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -x\tilde{a}(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0. \quad (1.3)$$

Коренями цього рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}. \quad (1.4)$$

З умови (1.2) бачимо, що у випадку, коли точка  $x=0$  є точкою звороту для системи (1.1), то виконуються наступні умови:  $tr A(x, 0) \equiv 0$ ,  $\det A(0, 0) = 0$ .

2. Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь

Для побудови РАР системи (1.1) застосуємо методіку, розроблену для рівняння Ліувілля і систем СЗДР з алгебраїчною точкою звороту (див. [7-

12]). З метою виділення всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що виникають в розв'язку системи (1.1) за рахунок особливої точки  $\varepsilon = 0$ , введемо регуляризуючу змінну  $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$ , де показник  $p$  і регуляризуюча функція  $\varphi(x)$  підлягають визначенню.

Для визначення “розширеної” функції одержимо “розширене” векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p} \varphi'(x) \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon) \tilde{y}(x, t, \varepsilon) = 0. \quad (2.1)$$

Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (2.1) будемо у вигляді

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^2 D_k(x, t, \varepsilon) + \omega(x, t, \varepsilon). \quad (2.2)$$

Тут

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) + \varepsilon^\nu \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon^{s_1} \alpha_{k1}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{s_2} \alpha_{k2}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{s_3} \alpha_{k3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_k(t) + \varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1} \beta_{k1}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{k_2} \beta_{k2}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{k_3} \beta_{k3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_k'(t), \quad (2.3)$$

$$\omega(x, \varepsilon) \equiv \text{colon}(\omega_1(x, \varepsilon), \omega_2(x, \varepsilon), \omega_3(x, \varepsilon)), \quad (2.4)$$

де  $\theta(x, \varepsilon) \equiv \{\alpha_{ks}(x, \varepsilon), \beta_{ks}(x, \varepsilon), \omega_s(x, \varepsilon)\}$ ,  $s = \overline{1,3}$  – аналітичні вектор-функції відносно малого параметра  $\varepsilon > 0$  і нескінченно диференційовні за змінною  $x \in [0;1]$ , які необхідно визначити,  $U_k(t)$ ,  $k = 1,2$  – функції Ейрі-Дородніцина (див.[4]).

Спочатку вивчимо дію розширеного оператора  $\tilde{L}_\varepsilon$  на вектор-функцію  $D_k(x, t, \varepsilon)$  і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (2.1). Отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon (\alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t)) &= \varepsilon^{1-p} \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) U_k'(t) - \\ &- \varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) \varphi(x) U_k(t) - A(x, \varepsilon) \alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) - \\ &- \varepsilon^\gamma A(x, \varepsilon) \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) + \varepsilon \alpha_k'(x) U_k(t) + \varepsilon^{1+\gamma} \beta_k'(x) U_k'(t) = 0. \end{aligned}$$

Зрівняємо коефіцієнти біля ІОФ  $U_k(t)$ ,  $k = 1,2$  та їх похідних. Маємо наступні векторні рівняння ( $k = 1,2$ ):

$$U_k'(t): \varepsilon^{1-p} \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \varepsilon^\gamma [A_0(x) + \varepsilon A_1] \beta_k(x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma} \beta_k'(x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

$$U_k(t): -\varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1] \alpha_k(x, \varepsilon) = -\varepsilon \alpha_k'(x, \varepsilon). \quad (2.6)$$

Запишемо однорідні векторні рівняння (2.5) і (2.6), поки що з врахуванням тільки основної матриці  $A_0(x)$ , у вигляді алгебраїчних систем рівнянь ( $k = 1;2$ ). Маємо

$$\begin{cases} \varepsilon^{1-p+s_1} \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi'(x) = 0 \\ \varepsilon^{1-p+s_2} \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \varepsilon^{\gamma+k_3} \beta_{k_3}(x, \varepsilon) = 0 \\ \varepsilon^{1-p+s_3} \varphi'(x) \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{\gamma+k_1} b(x) \beta_{k_1}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{\gamma+k_2} a(x) \beta_{k_2}(x, \varepsilon) = 0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_1} \beta_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) = 0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_2} \beta_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - \varepsilon^{s_3} \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) = 0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_3} \beta_{k_3}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + \varepsilon^{s_1} b(x) \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{s_2} a(x) \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Нагадаємо, що ми хочемо, щоб  $\alpha_{k_s}(x, \varepsilon)$ ,  $\beta_{k_s}(x, \varepsilon)$ ,  $s = \overline{1,3}$  – були аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Тому будемо вимагати, щоб в одержаній алгебраїчній системі рівнянь (2.7) рівняння були регулярно збуреними відносно малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Для цього показники степенів малого параметра в кожному рівнянні повинні бути однакові, тобто повинно пройти скорочення малого параметру з цими степенями. Одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 - p + s_1 = 0 \\ 1 - p + s_2 = \gamma + k_3 \\ 1 - p + s_3 = \gamma + k_1 = \gamma + k_2 \\ 1 + \gamma - 2p + k_1 = 0 \\ 1 + \gamma - 2p + k_2 = s_3 \\ 1 + \gamma - 2p + k_3 = s_1 = s_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Дослідимо дану систему рівнянь. Після певних перетворень отримаємо

$$p = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}, \quad k_1 = k_2 = s_3 = 0, \quad s_1 = s_2 = k_3 = \frac{-1}{3}. \quad (2.9)$$

З врахуванням (2.9) векторні рівняння (2.5) і (2.6) запишемо у вигляді  $\left( \mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \right)$

$$U_k(t): \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) - A_0(x) \beta_k(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta_k'(x, \varepsilon) + \mu^3 A_1 \beta_k(x, \varepsilon), \quad (2.10)$$

$$U_k(t): \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + A_0(x) \alpha_k(x, \varepsilon) = \mu^3 \alpha_k'(x, \varepsilon) - \mu^3 A_1 \alpha_k(x, \varepsilon). \quad (2.11)$$

При показниках (2.9) векторні рівняння (2.10), (2.11) можна записати у вигляді наступної системи алгебраїчних рівнянь ( $k = \overline{1,2}$ )

$$\begin{cases} \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi'(x) = \mu^3 [\beta_{k_2}(x, \varepsilon) - \beta_{k_1}'(x, \varepsilon)] \\ \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \beta_{k_3}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta_{k_2}'(x, \varepsilon) \\ \varphi'(x) \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) + b(x) \beta_{k_1}(x, \varepsilon) + a(x) \beta_{k_2}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta_{k_3}'(x, \varepsilon) \\ -\beta_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) = -\mu^3 [\alpha_{k_1}'(x, \varepsilon) - \alpha_{k_2}(x, \varepsilon)] \\ -\beta_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \alpha_{k_2}'(x, \varepsilon) \\ -\beta_{k_3}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + b(x) \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) + a(x) \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \alpha_{k_3}'(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.12)$$

тобто вона буде вже регулярно збуреною системою.

3. Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи  
Розв'язок системи (2.12) шукаємо у вигляді вектор-функцій ( $k = 1, 2$ )

$$D_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r [\alpha_{kr}(x)U_k(t) + \beta_{kr}(x)U_k'(t)] \quad (3.1)$$

Для визначення компонент вектор-функцій  $\alpha_{kr}(x) = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x))$  та  $\beta_{kr}(x) = colon(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$  отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_{k0}(x) = 0, \quad \Phi(x)Z_{kr}(x) = F Z_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 1. \quad (3.2)$$

Тут  $Z_{kr}(x) = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$ , а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$F Z_{k(r-3)}(x) = colon \begin{pmatrix} [\beta_{k2(r-3)}(x) - \beta_{k1(r-3)}'(x)], & -\beta_{k2(r-3)}'(x), & -\beta_{k3(r-3)}'(x), \\ [\alpha_{k1(r-3)}'(x) - \alpha_{k2(r-3)}(x)], & \alpha_{k2(r-3)}'(x), & \alpha_{k3(r-3)}'(x) \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї системи. Маємо

$$\det \Phi(x) = (-a^2(x) + 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) - \varphi^2(x)\varphi'^4(x)) \cdot \varphi(x)\varphi'^2(x).$$

На даний момент регуляризуюча функція  $\varphi(x)$  ще не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x) - 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) + a^2(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0,$$

яку можемо записати у простішому вигляді, тобто

$$[\varphi'(x)]^2 \varphi(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0) = 0. \quad (3.4)$$

Розв'язком задачі (3.4) буде функція  $\varphi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{a(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}}$ .

При такому виборі регуляризуючої функції  $\varphi(x)$  визначник матриці (3.3) дорівнює нулю, тобто  $\det \Phi(x) \equiv 0$ . Існує нетривіальний розв'язок однорідної системи  $\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0, r = 0; 2$  вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon \left( 0, \frac{1}{\varphi'(x)} \beta_{k3r}(x), -\frac{a(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k2r}(x), 0, \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x) \right), \quad (3.5)$$

де  $\beta_{ksr}(x), k = 1; 2, s = 2; 3$  – до певного часу довільні, досить гладкі функції при  $x \in [0; 1]$ .

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (3.2). Спочатку розглянемо ці системи коли  $r = 3$ . Врахувавши одержаний розв'язок (3.5), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x) = \beta_{k20}(x) - \beta_{k10}'(x) \equiv \beta_{k20}'(x) \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta_{k20}'(x) \\ a(x)\alpha_{k23}(x) + b(x)\alpha_{k13}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = -\alpha_{k30}'(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

та

$$\begin{cases} -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x) = \alpha_{k10}'(x) - \alpha_{k20}(x) \equiv -\alpha_{k20}(x) \equiv -[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x) \\ -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) - \alpha_{k33}(x) = \alpha_{k20}'(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)) \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) + b(x)\beta_{k13}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta_{k30}'(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

З перших рівнянь систем (3.6) і (3.7) визначимо функції  $\alpha_{k13}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k20}(x)$  та  $\beta_{k13}(x) = -[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)$ . Тоді системи (3.6) і (3.7) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta_{k20}'(x) \\ a(x)\alpha_{k23}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = -\alpha_{k30}'(x) - b(x)\alpha_{k13}(x) \end{cases} \quad (3.8)$$

та

$$\begin{cases} -\alpha_{k33}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \alpha_{k20}'(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)) \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta_{k30}'(x) - b(x)\beta_{k13}(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

Регуляризуюча функція  $\varphi(x)$  визначена як розв'язок задачі (3.4). Тому визначники цих систем однакові і тотожно рівні нулеві, тобто  $\Delta(x) = [\varphi'(x)]^2\varphi(x) + a(x) \equiv 0$ . Отже, в загальному випадку не існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.8) і (3.9). Тому необхідно дослідити більш детально праві частини цих систем. Згідно теореми Кронеккера-Капеллі для того, щоб існував нетривіальний розв'язок систем (3.8) і (3.9) необхідно і досить, щоб ранги розширених матриць співпадали з відповідними рангами матриць цих систем. Для виконання цих умов скористаємось довільністю функцій  $\beta_{ik0}(x)$ , які містяться у правих частинах систем (3.8) і (3.9) наступним чином.

Оскільки маємо системи двох рівнянь, то умови теореми Кронеккера-Капеллі еквівалентні виконанню умов

$$\frac{\varphi'(x)}{a(x)} \equiv \frac{-1}{-\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k30}(x)\right)}{\beta_{k30}'(x)}, \quad k=1, 2 \quad (3.10)$$

і

$$\frac{\varphi'(x)}{-1} \equiv \frac{a(x)}{-\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\frac{d}{dx} \left( -\frac{a(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k20}(x) \right)}{\beta_{k20}'(x)}, \quad k=1, 2. \quad (3.11)$$

З (3.10) при фіксованому  $k=1, 2$  одержимо диференціальне рівняння

$$(1 - \varphi(x))\beta_{k30}'(x) + \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k30} = 0. \quad (3.12)$$

З (3.11) при фіксованому  $k=1, 2$  одержимо диференціальне рівняння

$$(\varphi(x) - 1)\beta_{k20}'(x) + \frac{\varphi'^2(x) + \varphi''(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k20} = 0. \quad (3.13)$$

Оскільки  $\varphi(x) - 1 \neq 0$  для всіх  $x \in [0; 1]$ , то існують досить гладкі розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (3.12) і (3.13), які запишемо у вигляді  $\beta_{ks0}(x) = \beta_{k30}^0 \cdot \beta_{k30}(x)$ ,  $k=1, 2$ ,  $s=2; 3$ , де  $\beta_{ks0}^0(x)$  – довільні сталі,  $\tilde{\beta}_{ks0}(x)$  – частинні, досить гладкі для всіх  $x \in [0; 1]$ , розв'язки однорідних рівнянь (3.12) і (3.13).

При такому визначенні вектор-функцій  $Z_{k0}(x)$  існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.8) і (3.9) вигляду

$$Z_{k1}(x) = \text{colon} \left( \begin{array}{l} [\varphi'(x)]^{-1} \beta_{k20}(x), \frac{\beta_{k31}(x) + \alpha_{k20}'(x)}{\varphi'(x)}, \frac{\alpha_{k30}'(x) - a(x)\beta_{k21}(x)}{\varphi'(x)}, \\ [\varphi(x)]^{-1} [\varphi'(x)]^{-2} \beta_{k20}(x), \beta_{k21}(x), \beta_{k31}(x) \end{array} \right),$$

де  $\beta_{k21}(x)$  та  $\beta_{k31}(x)$ , як і в (3.5), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх  $x \in [0; 1]$ .

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (3.6) і (3.7) при  $r > 1$ , методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (3.6) і (3.7) при  $r = \overline{0; q}$ , то кожна з цих систем при  $r = \overline{0; q-1}$  і фіксованому  $k=1; 2$  визначається з точністю до двох довільних скалярних множників  $\beta_{k2r}^0(x)$  і  $\beta_{k3r}^0(x)$ , які утворюють довільний вектор  $\beta_{kr}^0 = \text{colon}(\beta_{k1r}^0, \beta_{k2r}^0, \beta_{k3r}^0)$ .

Висновок. Таким чином, розв'язуючи поступово системи рівнянь (3.6) і (3.7), отримаємо два формальні розв'язки розширеного векторного рівняння (2.10) вигляду

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[ \alpha_{kr}(x) U_k(t) + \varepsilon^{1/3} \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) \right], \quad k=1; 2, \quad (3.14)$$

де  $\alpha_{kr}(x) = \text{colon}(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x))$  та

$\beta_{kr}(x) = \text{colon}(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$  відомі вектор-функції.

Проведемо звуження в отриманих формальних розв'язках (3.14) при  $t = \varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)$ . Тоді отримаємо два формальні розв'язки досліджуваного векторного рівняння (1.1) вигляду

$$D_k \left( x, \varepsilon^{-2/3} \varphi(x), \varepsilon \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[ \alpha_{kr}(x) U_k \left( \varepsilon^{-2/3} \varphi(x) \right) + \varepsilon^{1/3} \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) \Big|_{t=\varepsilon^{-2/3} \varphi(x)} \right],$$

$$k = 1, 2 \quad (3.15)$$

Третій формальний розв'язок векторного рівняння (1.1) будемо у вигляді (2.4), тобто у вигляді

$$\omega(x, \varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv \text{colon} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x) \right). \quad (3.16)$$

Підставивши (3.16) у рівняння (1.1), отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x) \omega_0(x) = 0, \quad A_r(x) \omega_r(x) = -A_1(x) \omega_{(r-1)}(x) - \omega_{(r-1)}'(x), \quad r \geq 1. \quad (3.17)$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння  $A_0(x) \omega_0(x) = 0$ . Маємо  $\omega_{03}(x) \equiv 0$  і систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega_{01}'(x) - \omega_{02}(x) = 0 \\ x \tilde{a}(x) \omega_{02}(x) + b(x) \omega_{01}(x) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння:

$$x \tilde{a}(x) \omega_{01}'(x) + b(x) \omega_{01}(x) = 0. \quad (3.18)$$

Розв'язок однорідного рівняння (3.18) має вигляд

$$\omega_{01}(x) = \omega_{01}^0 \cdot \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}, \quad (3.19)$$

де  $\omega_{01}^0$  – довільна стала.

До цього часу ми не використовували умову на коефіцієнт  $b(x)$ . З врахуванням того, що  $b(x) < 0$  (див. умови (2)) маємо  $\frac{-b(0)}{\tilde{a}(0)} = K > 0$ . Тому розв'язок (3.19) є досить гладкою функцією на всьому відрізку  $[0; 1]$ , включаючи і точку  $x = 0$ .

Скориставшись розв'язком (3.19), отримаємо розв'язок  $\omega_{02}(x) = \omega_{01}'(x) = -\omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}$ .

Таким чином, нами побудоване нульове наближення

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= \text{colon}(\omega_{01}(x), \omega_{02}(x), \omega_{03}(x),) \equiv \\ &\equiv \text{colon} \left( \omega_{01}^0 \cdot \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}, \omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}, 0 \right), \end{aligned}$$

яке містить одну довільну сталу  $\omega_{01}^0$ .

На наступному кроці отримаємо неоднорідну систему рівнянь, при розв'язуванні якої знову отримаємо розв'язок, який буде містити одну довільну сталу  $\omega_{11}^0$ . Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (3.17), поступово визначимо всі розв'язки  $\omega_r(x)$ , тобто отримаємо третій розв'язок системи (1.1) у вигляді формального ряду (3.16).

Теорема. Нехай: 1)  $a(x) \equiv x\tilde{a}(x)$ ,  $b(x) \in C^\infty[0;1]$ ; 2) виконуються умови (2). Тоді;

а) розширене однорідне векторне рівняння (2.1) має три формальні розв'язки, зображені у вигляді формальних рядів (3.1),  $k=1;2$  та (3.16);

б) звуження формальних рядів (3.1),  $k=1;2$  при  $t = \varepsilon^{-2/3}\varphi(x)$  та ряд (3.16) утворюють три лінійно незалежні розв'язки однорідної системи диференціальних рівнянь (1.1).

### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464~с.
2. Wasow W. Linear turning point theory. – Springer-Verlag New York Ins., 1985. – 243 p.
3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М., 1981.
4. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. –Т. 27, вып. 6(52). – С. 3–96.
5. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90 – P.~113-142.
6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. V. 226. – P. 227-241.
7. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.
8. Бобочко В.Н. Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I // Изв. Вузов. Математика. – 2002. – №3. С. 3-14.
9. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота. II // Изв. Вузов. Математика. – 2002.– № 5. С. 3–13.
10. Бобочко В.Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I // Изв. Вузов. Математика. – 2004. – С. .
11. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с сильной точкой поворота // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, №11. – С. 1543-1547.
12. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, №10. – С. 1304-1312.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 25 березня 2006 р.*

УДК 511.2

## P-НОРМАЛИЗОВАННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Ю.И. Волков , О.Ю. Волкова**

Дається визначення спеціального перетворення довільних послідовностей невід'ємних цілих чисел, які містять у собі тільки скінченне число ненульових елементів. Доводиться, що за допомогою скінченного числа таких перетворень довільну послідовність можна привести до деякого канонічного виду (можна нормалізувати). Цей результат застосовується для побудови систем числення з ірраціональними основами, зокрема, одим із наслідків є теорема Бергмана про систему числення основа якої є золота пропрція.

We define a special transformation of arbitrary sequences nonnegative integers with only finitely many non-zero elements. We prove that any sequence can be reduced to a normalized form using a finite number of such transformations. This result can be useful for construction systems of numeration with irrational bases. In particular, Bergman theorem about a system of numeration with base golden ratio is a corollary of our result.

Пусть дана произвольная двусторонняя последовательность неотрицательных целых чисел, которая содержит только конечное число ненулевых элементов:

$$(1) \quad \dots, 0, 0, a_n, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots, a_{-k}, 0, 0, \dots$$

Будем изменять члены этой последовательности при помощи двух преобразований. Пусть

$$(2) \quad p_m \geq p_{m-1} \geq \dots \geq p_1 \geq \dots \geq p_0 > 0$$

натуральные числа и пусть  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 1.** *P-преобразованием первого типа называется замена подпоследовательности (ПП)*

$$(3) \quad \{a_{k-1}, a_k, \dots, a_{k+m}\}$$

на ПП

$$(4) \quad \{a_{k-1} + 1, a_k - p_m, \dots, a_{k+m} - p_0\}.$$

*P-преобразованием второго типа называется замена ПП*

$$(5) \quad \{a_{k-1}, a_k, \dots, a_{k+m+1}\}$$

на ПП

$$(6) \quad \{a_{k-1} + 1, a_k - p_m - 1, a_{k+1} + p_m - p_{m-1}, \dots, a_{k+m} + p_1 - p_0, a_{k+m+1} + p_0\}.$$

*P-преобразования, которые не порождают отрицательных членов, называются допустимыми.*

Заметим, что каждое преобразование первого типа уменьшает сумму членов последовательности на  $p_m + p_{m-1} + \dots + p_0 - 1$  единиц, а преобразование второго типа сумму членов последовательности не меняет.

**Определение 2.** ПП (3) с неотрицательными членами называется нормализованной 1-го типа, если хотя бы одно из чисел  $a_k - p_m, \dots, a_{k+m} - p_0$  отрицательное, ПП (5) с неотрицательными членами называется нормализованной 2-го типа, если  $a_k - p_m - 1 < 0$ .

**Определение 3.** Последовательность (1) называется  $P$ -нормализованной, если для всякого  $k \in \mathbb{Z}$  подпоследовательности (3) и (5) являются нормализованными, соответственно, 1-го или 2-го типов.

**Теорема 1.** Произвольную последовательность с конечным числом неотрицательных целых чисел за конечное число  $P$ -преобразований первого и второго типов можно нормализовать.

*Доказательство.* Сначала над нашей последовательностью выполним все допустимые преобразования первого типа, их может быть только конечное число, ибо эти преобразования уменьшают сумму членов последовательности. Кроме того, преобразования первого типа не порождают новые ПП, которые находятся левее и к которым можно применять преобразования второго типа.

Дальше будем просматривать члены преобразованной последовательности слева направо до тех пор пока не встретим ПП к которой можно применить преобразование второго типа.

Выполним это преобразование. Если полученная ПП ненормализованная, то выполним (если это возможно) преобразование первого типа.

В результате такой процедуры  $k$ -ый член последовательности уменьшится, а следовательно, через конечное число шагов ненормализованная ПП на месте ПП (3) исчезнет, но может появиться ненормализованная ПП справа и к этой ПП можно будет применить преобразование второго типа.

Поскольку ненулевых членов последовательности (1) имеется конечное число, то в результате конечного числа преобразований второго типа исчезнут все ненормализованные ПП.

**Теорема 2.** Пусть  $A(x)$  произвольный многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и  $p_m \geq p_{m-1} \geq \dots \geq p_1 \geq \dots \geq p_0 > 0$  натуральные числа. Тогда существуют такие натуральное  $r$  и многочлен  $C(x)$  с коэффициентами из множества  $\{0, 1, 2, \dots, p_m\}$ , что многочлен  $C(x) - x^r A(x)$  делится на многочлен

$$x^{m+1} - p_m x^m - p_{m-1} x^{m-1} - \dots - p_1 x - p_0.$$

*Доказательство.* Пусть  $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Поставим этому многочлену в соответствие последовательность его коэффициентов  $\dots, 0, 0, a_n, \dots, a_1, a_0, \dots$ . Р-преобразованиями первого типа отвечает прибавление к многочлену  $A(x)$  выражений вида  $(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \dots - p_1x - p_0)x^s, s \in Z$ ,

а Р-преобразованиями второго типа отвечает прибавление к многочлену  $A(x)$  выражений вида

$$(x^{m+2} - (p_m + 1)x^{m+1} + (p_m - p_{m-1})x^m + \dots + (p_1 - p_0)x + p_0)x^s = \\ (x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \dots - p_1x - p_0)(x-1)x^s, s \in Z.$$

Следовательно, алгоритму нормализации последовательности (2) будет отвечать прибавление к многочлену  $A(x)$  разнообразных выражений этих видов, сумму которых можно записать так:  $R(x)(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \dots - p_1x - p_0)x^s$ , где  $R(x)$  многочлен относительно  $x^{-1}$ . В результате прибавлений мы получим многочлен  $A(x) + R(x)(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \dots - p_1x - p_0)$  относительно  $x^{-1}$  с коэффициентами из множества  $\{0, 1, 2, \dots, p_m\}$ . Если обозначить минимальный показатель  $x$  в выражении  $R(x)$  через  $(-r)$ , то многочлен

$$(7) C(x) = A(x)x^r + R(x)(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \dots - p_1x - p_0)x^r,$$

будет искомым.

**Следствие 1.** Пусть  $N$  произвольное натуральное число, а  $\lambda$  какой-нибудь нуль (не обязательно действительный) многочлена

$$x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \dots - p_1x - p_0.$$

Тогда существует такая линейная комбинация различных целых степеней числа  $\lambda$  с коэффициентами из множества  $\{0, 1, 2, \dots, p_m\}$ , что ее значение равно  $N$ , а последовательность коэффициентов этой линейной комбинации будет Р-нормализованной.

Действительно, возьмем в качестве многочлена  $A(x)$  число  $N$  и положим в соотношении (7)  $x=\lambda$ , в результате получим требуемый результат.

**Пример 1.** Пусть  $t = 0, p_0 > 0$ . Тогда произвольное натуральное число можно представить в виде конечной линейной комбинации различных целых степеней числа  $p_0$ , то-есть, в этом случае алгоритм нормализации превращается в алгоритм получения кода числа  $N$  в система счисления с основанием  $p_0$ .

**Пример 2.** Пусть  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398877498\dots$  золотая пропорция.

Тогда произвольное натуральное число можно представить в виде конечной линейной комбинации различных непоследовательных целых степеней числа  $\varphi$ .

Действительно, золотая пропорция корень уравнения  $x^2 - x - 1 = 0$ , положим  $m = 1, p_1 = p_0 = 1$  и воспользуемся следствием 1.

Впервые этот результат был получен в 1957 году Бергманом [1] и послужил мотивом для построения бинарной системы счисления с иррациональным основанием  $\varphi$ . Коды чисел в такой системе называются кодами золотой пропорции. Более детально с такой системой счисления можно познакомиться в [2].

**Пример 3.** Пусть  $\lambda$  какой-нибудь корень уравнения  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ . Тогда произвольное натуральное число можно представить в виде конечной линейной комбинации различных целых степеней числа  $\lambda$ .

Действительно, положим  $m = 2, p_2 = p_1 = p_0 = 1$  и воспользуемся следствием 1. Взяв корень

$$\lambda = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} = 1,8392867552141611326\dots$$

за основание системы счисления, получим бинарную систему счисления. Приведем небольшую таблицу кодов натуральных чисел в такой системе.

число	код	число	код
2	10.001	16	10101.001000011
3	11.001	17	10110.010001011
4	100.100011	18	11000.010001011
5	101.100011	19	11001.010001011
6	110.101011	20	11010.011001011
7	1000.101011	30	101010.110010000011
8	1001.101011	40	1000001.001101010011
9	1010.110100011	50	1001101.10010110110101
10	1100.010100011	60	1100000.001010110110011
11	1101.010100011	70	1101100.100011010110011
12	10000.100000011	80	10001010.101000110010011
13	10001.100000011	90	10011001.000101010010011
14	10010.101000011	100	10101001.011010011010011
15	10100.001000011		

Эти коды дают также примеры числовых тождеств, например,

$$7 = \lambda^3 + \lambda^{-1} + \lambda^{-3} + \lambda^{-5} + \lambda^{-6}.$$

**Следствие 2.** Пусть последовательность  $\{v_k\}$  задана при помощи рекуррентного соотношения

$$v_{k+m+1} = p_m v_{k+m} + p_{m-1} v_{k+m-1} + \dots + p_1 v_{k+1} + p_0 v_k, k \in Z, v_0 = 1,$$

$v_1, \dots, v_m$  – произвольные. Тогда произвольное натуральное число  $N$  можно представить в виде

$$N = \sum_{k=-r}^l n_k v_k, n_k \in \{0, 1, 2, \dots, p_m\}.$$

В самом деле, если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$  корни уравнения

$$x^{m+1} - p_m x^m - p_{m-1} x^{m-1} - \dots - p_1 x - p_0 = 0, \quad \text{то}$$

$v_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + C_{m+1} \lambda_{m+1}^k$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_{m+1}$  такие постоянные, что  $C_1 + C_2 + \dots + C_{m+1} = 1$ , и тогда, в силу следствия 1

$$N = \sum_{k=-r}^l n_k \lambda_1^k, \dots, N = \sum_{k=-r}^l n_k \lambda_{m+1}^k,$$

ПОЭТОМУ

$$(C_1 + \dots + C_{m+1})N = N = \sum_{k=-r}^l n_k (C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + C_{m+1} \lambda_{m+1}^k) = \sum_{k=-r}^l n_k v_k.$$

В связи с понятием Р-преобразования появляется задача о количестве  $t(N)$  операций для нормализации произвольного натурального числа  $N$ . Так, если  $m=0$ , то понятно, что  $t(N) = [N/p_0]$ , следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)}{N} = \frac{1}{p_0}.$$

В случае  $m=1$  мы полагаем, что имеет место соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)}{N} = \frac{p_1}{p_1^2 - (p_0 - 1)^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right),$$

в частности, если  $p_0 = p_1 = 1$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)}{N} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. Bergman G. A number system with an irrational base//Mathematics magazine. – 1957. – №31. – P.98119.
2. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 154с.

Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка

Інститут математики НАН України

Надійшло 10 січня 2006 р.

УДК 518.3 / 681.142.2

## ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ЯДРАМИ ТИПА ФУНКЦИИ ГРИНА

**П. Н. Денисенко**

The algorithm of applying the V. K. Dzyadyk a-method of solving the Volterra integral equations with polynomial coefficients to the integral equations of more general type – with polynomial coefficients, kernels and limits on integral is developed. The method optimality by precision order is proved.

В роботі побудовано алгоритм застосування а-методу В. К. Дзядика розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольєрра з многочленними коефіцієнтами до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь більш загального вигляду – з коефіцієнтами, ядрами та межами інтегрування – многочленами. Доказана оптимальність цього алгоритму по порядку точності.

**Введение.** ЛИУМК – это линейное интегральное уравнение

$$F[y] = 0, F[y] := L[y] + g; L[y] := Ay + K_1[y] + \dots + K_k[y]; \quad (1)$$

которое удовлетворяет следующим требованиям:

– ядра  $K_1, \dots, K_k$  линейных интегральных операторов  $K_1[y], \dots, K_k[y]$  являются известными многочленами независимых переменных  $x, t$ ;

– коэффициент  $A$ , свободный член  $g$  и пределы интегрирования  $c_1, d_1, \dots, c_k, d_k$  линейных интегральных операторов  $K_1[y], \dots, K_k[y]$  являются известными многочленами независимой переменной  $x$ ;

– в точке ноль коэффициент  $A$  не имеет нулей – уравнение (1) не имеет особенности вида

$$A(0) = 0 \quad (2)$$

– решение уравнения (1) единственное и является функцией переменной  $x$  аналитической в точке ноль

$$y := solve(F[y] = 0) := c_0 + \dots + c_n \cdot x^n + \dots; \quad (3)$$

Линейные интегральные уравнения с многочленными коэффициентами (1) являются тем типом интегральных уравнений, который наиболее часто используется в математических моделях процессов физики и техники [1]. ЛИУМК (1) без особенности (2) определяют часть специальных функций математической физики:

– элементарные –  $\sin(x), \cos(x), \exp(x), \arctg(x), \ln(x+1), \dots$ ,

– высшие трансцендентные – функции Эйри, ...

**Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Mathcad, ...**

стали естественной средой математического моделирования. СКА не имеют процедур для решения ЛИУМК (1). СКА имеют эффективные средства программирования символьного преобразования алгебраических многочленов. Поэтому для математического моделирования объектов описываемых ЛИУМК (1) в СКА актуальна задача построения приближенного метода решения ЛИУМК имеющего следующие характеристики:

– решением ЛИУМК (1) является алгебраический многочлен степени  $n$

$$y_n := solve( approx(F[y] = 0, [a,b], n) ) = c_0 + \dots + c_n \cdot x^n; \quad (4)$$

– метод является оптимальным по порядку точности аппроксимации в пространстве  $C_{[a,b]}$

$$C_n := \| y - y_n \|_{C_{[a,b]}} / E[n, y, C_{[a,b]}] < \infty, \| y \|_{C_{[a,b]}} := \max_{x \in [a,b]} | y(x) |; \quad (5)$$

где величина наилучшего приближения функции  $y$  (3) алгебраическими многочленами степени  $n$  в пространстве  $C_{[a,b]}$

$$E[n, y, C_{[a,b]}] := \inf( \{ c_0, \dots, c_n \}, \| y - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[a,b]}} ) \quad (6)$$

### Метод 1 – алгоритм решения ЛИУМК (1) а-методом В.К. Дзядыка:

1. Вычислить многочлен

$$F[ main\_pol(n) ] := subs(y = main\_pol(n), F[y]); \quad (7)$$

– преобразовать оператором  $F[ y ]$  уравнения (1) многочлен порядка  $n$  с символьными коэффициентами

$$\{ c_0, c_1, \dots, c_n \} := \{ c_0(n), c_1(n), \dots, c_n(n) \}; \quad (8)$$

классического вида

$$main\_pol(n) := c_0 + c_1 * x + \dots + c_n \cdot x^n; \quad (9)$$

2. Вычислить порядок дополнительного многочлена а-метода В.К. Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2].– порядок многочлена (7)

$$m = deg( F[main\_pol(n) ] ); \quad (10)$$

3. Вычислить дополнительный многочлен а-метода В. К. Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2] на отрезке  $[-1, 1]$

$$E(m, n) := \tau_1 \cdot f_{n+1}(x) + \dots + \tau_{m-n} \cdot f_m(x); \quad (11)$$

Многочлен имеет параметры  $m$  (10) и  $n$ , символьные коэффициенты

$$\{ \tau_1, \dots, \tau_{m-n} \} = \{ \tau_1(n), \dots, \tau_{m-n}(n) \} \quad (12)$$

и базис – многочлены Чебышева первого рода

$$f_i(x) = cheb(i, x) = \cos(i \arccos(x)), \quad i = 0, 1, \dots; \quad (13)$$

4. Перенести многочлен (11) линейно на отрезок аппроксимации  $[a, b]$   
 $E(m, n, z(x)) := \text{subs}(x = z(x), E(m, n)); z(x) := 2(x-a)/(b-a) - 1; (14)$

5. Вычислить аппроксимацию ЛИУМК (1) а-методом В. К. Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2] – систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$S = \{ \text{coefTayl}(F[\text{main\_pol}(n)] + E(m, n, z(x)), i) = 0, i = 0, \dots, m \}; (15)$$

– вычислить коэффициенты Тейлора суммы многочленов  $F[\text{main\_pol}(n)]$  (7) и  $E(m, n, z(x))$  (14) и приравнять их нулю.

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (15) и вычислить значения коэффициентов (8), (12) многочленов  $y_n$  (4) и  $E(m, n, z(x))$  (14).

7. Вычислить искомую аппроксимацию  $y_n$  (4) решения уравнения (1) – преобразовать значения коэффициентов (8) в многочлен с этими коэффициентами.

**Замечание 1.** По технологии программирования аналитических приближенных методов решения функциональных уравнений в системе алгебраического программирования APS метод 1 преобразован в процедуру на языке APLAN [3]. Эта процедура решает весь класс ЛИУМК (1) без особенности вида (2).

### 3. Метод 1 как алгоритм проекционного метода.

Пространство Гильберта  $H = L_2(a, b; \rho)$  имеет:

– элементы – функции  $y, u, v, \dots := y(x), u(x), v(x), \dots; x \in [a, b];$

– базис – многочлены Чебышева первого рода (13) линейно перенесенные

$z(x)$  (14) на отрезок  $[a, b] - \text{cheb}(n, z(x)), n = 0, 1, \dots;$

– коэффициенты Фурье-Чебышева по этому базису

$$a_n(y) := (y, \text{cheb}(n, z(x)))_{L_2(a, b; \rho)}, n = 0, 1, \dots;$$

– ряд Фурье-Чебышева функции на отрезке  $[a, b]$

$$y = a_0(y) \cdot \text{cheb}(0, z(x)) + \dots + a_m(y) \cdot \text{cheb}(m, z(x)) + \dots;$$

– скалярное произведение  $(u, v)_{L_2(a, b; \rho)}$  и норму

$$\|y\|_{L_2(a, b; \rho)}^2 := (y, y)_{L_2(a, b; \rho)} := a_0(y)^2 + \dots + a_m(y)^2 + \dots;$$

– оператор вычисления частной суммы ряда Фурье-Чебышева порядка  $n$  функции на отрезке  $[a, b]$

$$S_n[c_0 \cdot \text{cheb}(0, z(x)) + \dots + c_n \cdot \text{cheb}(n, z(x)) + \dots := c_0 \cdot \text{cheb}(0, z(x)) + \dots + c_n \cdot \text{cheb}(n, z(x)); (16)$$

Оператор  $S_n$  (16) проектирует пространство  $L_2(a,b;\rho)$  в пространство алгебраических многочленов степени  $n - H_n$ ,  $H_n \subset L_2(a,b;\rho)$

$$S_n : L_2(a,b;\rho) \rightarrow H_n$$

и порождает проекционный метод решения уравнения (1)

$$S_n[ L[ y_n ] + g ] = 0 \quad (y_n \in H_n - y_n := \text{main\_pol}(n); ) \quad (17)$$

**Теорема 1.** Пусть линейное интегральное уравнение (1) имеет свободный член – многочлен –  $g \in H_m$  и оператор

$$L : L_2(a,b;\rho) \rightarrow L_2(a,b;\rho), H_n \rightarrow H_m$$

Тогда аппроксимация (15) уравнения (1) эквивалентна системе – уравнение (17) и тождества

$$(F[ \text{main\_pol}(n) ], \text{cheb}(i,z(x)) )_{L_2(a,b;\rho)} + \tau_{i-n} = 0, \quad i = n+1, \dots, m \quad (18)$$

**Доказательство.** Оператор  $F[ y ]$  уравнения (1) преобразует пространство  $H_n$  в пространство  $H_m$ . Поэтому аппроксимация (15) уравнения (1) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$(F[\text{main\_pol}(n)] + E(m,n,z(x)), \text{cheb}(i, z(x)) )_{L_2(a,b;\rho)} = 0, \quad i = 0, \dots, m \quad (19)$$

относительно коэффициентов (8), (12) многочленов  $\text{main\_pol}(n)$ ,  $E(m,n,z(x))$ .

Для коэффициентов Фурье-Чебышева многочлена имеет место тождество

$$(a_0 \cdot \text{cheb}(0,z(x)) + \dots + a_i \cdot \text{cheb}(i,z(x)) + \dots, \text{cheb}(i,z(x)) )_{L_2(a,b;\rho)} := a_i$$

Поэтому: – имеют место тождества

$$(E(m,n,z(x)), \text{cheb}(i,z(x)) )_{L_2(a,b;\rho)} = 0, \quad i = 0, \dots, n;$$

$$(E(m,n,z(x)), \text{cheb}(i,z(x)) )_{L_2(a,b;\rho)} = \tau_{i-n} = 0, \quad i = n+1, \dots, m;$$

– первые  $n+1$  уравнения системы (19) имеют вид

$$(F[ \text{main\_pol}(n) ], \text{cheb}(i,z(x)) )_{L_2(a,b;\rho)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (20)$$

– остальные уравнения имеют вид (18).

Оператор  $S_n [ F[y_n] ]$  уравнения (17) преобразует пространство  $H_n$  в это же пространство. Поэтому, и согласно определения (16) оператора  $S_n$ , уравнение (17) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (20).

**Замечание 2.** В.К.Дзядык построил а-метод решения ЛИУМК Вольтерра [2] как алгоритм решения уравнений этого типа проекционным методом (17).

#### 4. Существование решения уравнения (1) методом 1.

**Теорема 2.** Пусть:

– линейное интегральное уравнение (1) имеет свободный член – многочлен и оператор

$$L : L_2(a,b;\rho) \rightarrow L_2(a,b;\rho) , H_n \rightarrow H_m$$

– оператор проєктирования  $S_n$  (16) преобразует пространство  $L[H_n]$  в пространство  $H_n$  взаимно однозначно.

Тогда существует и единственно решение аппроксимации (15) уравнения (1) – коэффициенты аппроксимирующего многочлена  $y_n$  (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена  $E(m,n,z(x))$  (14).

**Доказательство.** Если выполнены условия теоремы, то, согласно основной теореме сходимости проекционных методов [4] (с. 192, теорема 15.1), существует и единственно решение  $y_n \in H_n$  уравнения (17). Согласно теореме 1, аппроксимация (15) уравнения (1) эквивалентна уравнению (17) и тождествам (18).

**Замечание 3.** Проекционные методы имеют эффективные средства [4] (с. 193 – 195) для проверки условий теоремы 2.

### 5. Оценка погрешности метода 1.

**Теорема 3.** Пусть:

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор  $L : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ ;

– оператор  $L$  имеет линейный обратный оператор  $L^{-1}$ ;

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена  $y_n$  (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена  $E(m,n,z(x))$  (14).

Тогда для погрешности аппроксимации многочленом  $y_n$  решения  $y$  интегрального уравнения (1) имеет место тождество

$$y(x) - y_n(x) = L^{-1} [ E(m,n,z(x)) ] ; (21)$$

и справедливо неравенство

$$\| y - y_n \|_{C[a,b]} < W_{n+1} \cdot |\tau_1(n)| + \dots + W_m \cdot |\tau_{m-n}(n)|, (22)$$

где

$$W_i := \| L^{-1} [ cheb(i,z(x)) ] \|_{C[a,b]} ; (23)$$

**Доказательство.** Согласно условия 3 теоремы, известна невязка системы уравнений (15). Оператор  $L$  линейный. Поэтому разность уравнения (1) и аппроксимации этого уравнения  $\alpha$ -методом В. К. Дзядыка – эквивалента СЛАУ (15) –

$$L[y_n] + g + E(m,n,z(x)) = 0 \quad (y_n \in H_n \text{ -- } y_n := \text{main\_pol}(n);)$$

является уравнением относительно погрешности метода  $y - y_n$

$$L[y - y_n] = E(m,n,z(x))$$

Согласно условия 2 теоремы, решение этого уравнения имеет вид (21).

Неравенство (22) непосредственно следует из тождества (21).

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и последовательность значений коэффициента  $W_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$  (23) имеет конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| L^{-1} [ cheb(n, z(x)) ] \|_{C[a,b]} = W < \infty \quad (24)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| y - y_n \|_{C[a,b]} / (|\tau_1(n)| + \dots + |\tau_{m-n}(n)|) \leq W < \infty \quad (25)$$

**Доказательство.** Неравенство (25) непосредственно следует из тождеств (21) и (24).

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки  $\tau_i = \tau_i(n)$ .

Тогда справедливо тождество

$$\| y - y_n \|_{C[a,b]} = W_{n+i} |\tau_i(n)| \quad (26)$$

**Доказательство.** Тождество (21) в этом случае принимает вид  $y(x) - y_n(x) = L^{-1} [ cheb(n+i, z(x)) ] \tau_i(n)$  (27)

Тождество (26) следует из тождества (27), согласно очевидного тождества

$$\| L^{-1} [ cheb(n+i, z(x)) ] \tau_i(n) \| = \| L^{-1} [ cheb(n+i, z(x)) ] \| |\tau_i(n)|$$

**Следствие 3.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и уравнение (1) является корректной задачей --

$$\| L^{-1} \|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]} := \sup_{y \in C[a,b]} \| L^{-1}[y] \|_{C[a,b]} / \| y \|_{C[a,b]} < \infty$$

Тогда имеют место неравенства (22) и (25), где

$$W_i \leq \| L^{-1} \|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]}, \quad W \leq \| L^{-1} \|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]}$$

**Доказательство.** Согласно определения многочленов Чебышева, имеет место тождество

$$\| cheb(i, z(x)) \|_{C[a,b]} = \| cheb(i, x) \|_{C[-1,1]} = 1$$

Согласно определения нормы оператора, имеет место неравенство

$$\| L^{-1} [ cheb(i, z(x)) ] \|_{C[a,b]} \leq \| L^{-1} \|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]} \| cheb(i, z(x)) \|$$

Из полученных тождества и неравенства, очевидно, непосредственно следуют доказываемые неравенства.

## 6. Оптимальность метода 1.

**Теорема 4.** Пусть:

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор  $L : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ ;

– оператор  $L$  имеет линейный обратный оператор  $L^{-1}$ ;

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена  $y_n$  (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена  $E(m,n,z(x))$  (14).

– матрица

$$\{ Q_n \} = \{ a_{i,j}(L^{-1}), i, j = n+1, \dots, \deg(F[\text{main\_pol}(n)]) \}, \quad (28)$$

где

$$a_{i,j}(L^{-1}) := (L^{-1}[\text{cheb}(i,z(x))], \text{cheb}(j,z(x)))_{L_2(a,b;\rho)}$$

имеет обратную  $\{ Q_n \}^{-1}$ .

Тогда имеет место неравенство

$$\| y - y_n \|_{C[a,b]} / E[n, y, C[a,b]] \leq U_n \cdot V_n \cdot \max_{i=n+1, \dots, m} W_i, \quad (29)$$

где коэффициенты правой части имеют следующие значения:

– коэффициенты  $W_i$  – определены тождеством (23),

$$V_n := \max_{|C_1| + \dots + |C_{m-n}| = 1, \| \{ Q_n \}^{-1} \{ C_1, \dots, C_{m-n} \}^T \|_{l_2}}; \quad (30)$$

– норма матрицы  $\{ Q_n \}^{-1} : l \rightarrow l_2$  – обратной матрице  $\{ Q_n \}$  (28),

$$U_n := E[n, y, L_2(a,b;\rho)] / E[n, y, C[a,b]]; \quad (31)$$

**Доказательство.** Неравенство (29) непосредственно следует из теоремы 3 и лемм 1 и 2.

**Следствие 4.** Пусть выполнены условия теоремы 4 и имеют конечные пределы последовательности:

– значений коэффициента  $W_i$  (23) – предел (24);

– значений коэффициента  $V_n$  (30) – значений нормы матриц обратных матрицам (28)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|C_1| + \dots + |C_{m-n}| = 1, \| \{ Q_n \}^{-1} \{ C_1, \dots, C_{m-n} \}^T \|_{l_2}} := V < \infty \quad (32)$$

– значений коэффициента  $U_n$  (31)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[n, y, L_2(a,b;\rho)] / E[n, y, C[a,b]] = U < \infty; \quad (33)$$

Тогда последовательность значений коэффициента оптимальности (5) решения ЛИУМК (1) по методу 1 имеет конечный предел и имеет место неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \| y - y_n \|_{C[a,b]} / E[n, y, C[a,b]] = C, C \leq U V W < \infty; \quad (34)$$

**Доказательство.** Неравенство (34) непосредственно следует из неравенств (29), (24), (32), (33).

**Следствие 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки  $\tau_i = \tau_i(n)$ .

Тогда для оценки коэффициента оптимальности (5) решения ЛИУМК по методу 1 имеет место тождество

$$\|y - y_n\|_{C[a,b]} / |(y, \text{cheb}(n+i, z(x)))_{L_2(a,b;\rho)}| = W_{n+i} V_n, \quad (35)$$

где

$$V_n := |1/L^{-1}[\text{cheb}(n+i, z(x))], \text{cheb}(n+i, z(x))_{L_2(a,b;\rho)}|; \quad (36)$$

**Доказательство.** Тождество (35) непосредственно следует из тождеств (26) и (36).

**Лемма 1.** Пусть:

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор  $L : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ ;

– оператор  $L$  имеет линейный обратный оператор  $L^{-1}$ ;

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена  $y_n$  (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена  $E(m, n, z(x))$  (14).

– матрица  $\{Q_n\}$  (28) имеет обратную  $\{Q_n\}^{-1}$ .

Тогда имеет место тождество

$$\{\tau_1(n), \dots, \tau_{m-n}(n)\}^T = \{Q_n\}^{-1} \{a_{n+1}(y), \dots, a_m(y)\}^T \quad (37)$$

и справедливо неравенство

$$(|\tau_1(n)| + \dots + |\tau_{m-n}(n)|)^2 \leq V_n^2 (a_{n+1}^2(y) + \dots + a_m^2(y)) \quad (38)$$

**Доказательство.** Тождество (21) эквивалентно системе тождеств  $(y(x) - y_n(x), \text{cheb}(i, z(x)))_H = (L^{-1}[E(m, n, z(x))], \text{cheb}(i, z(x)))_H$ , где  $i = 0, 1, \dots$ ;  $H = L_2(a, b; \rho)$ ;

Часть этой системы – уравнения с номером  $i = n + 1, \dots, m$ , где  $m := \text{deg}(F[\text{main\_pol}(n)])$ ; очевидно, имеет вид

$$\{a_{n+1}(y), \dots, a_m(y)\}^T = \{Q_n\} \{\tau_1(n), \dots, \tau_{m-n}(n)\}^T$$

По условиям леммы, матрица  $\{Q_n\}$  имеет обратную. Поэтому тождество (37) является решением рассмотренной части этой системы.

Неравенство (38) является непосредственным следствием тождества (37).

**Следствие 6.** Пусть выполнены условия леммы 1 и имеет место асимптотическое тождество (32).

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|\tau_1(n)| + \dots + |\tau_{m-n}(n)|)^2 / (a_{n+1}^2(y) + \dots + a_m^2(y)) \leq V^2 < \infty; \quad (39)$$

**Доказательство.** Неравенство (39) непосредственно следует из тождеств (37) и (32).

**Следствие 7.** Пусть выполнены условия леммы 1 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки  $\tau_i = \tau_i(n)$ .

Тогда справедливо тождество

$$|\tau_i(n)| = V_n |(y, \text{cheb}(n+i, z(x)))_{L_2(a,b;\rho)}|, \quad (40)$$

где коэффициент  $V_n$  определен тождеством (36).

**Доказательство.** Тождество (40) непосредственно следует из тождества (37).

**Лемма 2.** Пусть:

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор  $L : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ ;

– оператор  $L$  имеет линейный обратный оператор  $L^{-1}$ ;

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена  $y_n$  (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена  $E(m, n, z(x))$  (14).

– матрица  $\{Q_n\}$  (28) имеет обратную  $\{Q_n\}^{-1}$ .

Тогда имеет место неравенство

$$\|y - y_n\|_{C[a,b]} / E[n, y, L_2(a,b;\rho)] \leq V_n \cdot \max_{i=n+1, \dots, m} W_i \quad (41)$$

**Доказательство.** Согласно теореме 3 и лемме 1 имеет место неравенство

$$\|y - y_n\|_{C[a,b]}^2 / (a_{n+1}^2(y) + \dots + a_m^2(y)) \leq V_n \cdot \max_{i=n+1, \dots, m} W_i \quad (42)$$

где

$$a_{n+1}^2(y) + \dots + a_m^2(y) \leq a_{n+1}^2(y) + \dots + a_m^2(y) + \dots := \|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)}$$

Частная сумма ряда Фурье-Чебышева функции  $S_n[y]$  является многочленом наилучшего приближения этой функции в пространстве  $L_2(a,b;\rho)$  и

$$\|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)} = E[n, y, L_2(a,b;\rho)]$$

Поэтому неравенство (41) следует из неравенства (42).

**Следствие 8.** Пусть выполнены условия леммы 2 и имеют место тождества (24) и (32).

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y_n\|_{C[a,b]} / E[n, y, L_2(a,b;\rho)] \leq V \cdot W < \infty \quad (43)$$

**Доказательство.** Неравенство (43) является непосредственным следствием неравенства (41).

**Следствие 9.** Пусть выполнены условия леммы 2 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки  $\tau_i = \tau_i(n)$ .

Тогда справедливо тождество (35).}

**Доказательство.** Тождество (35) непосредственно следует из тождеств (26) и (40).

### 7. Пример 1. Решение интегрального уравнения Фредгольма

$$y - 100 \int_0^x (1-x) t y(t) dt - 100 \int_x^1 (1-t) x y(t) dt - 1 = 0 \quad (44)$$

В работе [5] (с. 63) построен аналитический приближенный метод решения уравнения (44). Метод основан на аппроксимации уравнения (44) кубическими интерполяционными сплайнами. По методу вычислена [5] сеточная функция с 21 узлом

$$\{y_{20}(i/20), i = 0, \dots, 20\} := \text{spline\_method}(F[y]=0 \text{ (44)}, [0,1], q = 20);$$

Погрешность аппроксимации этой функцией точного решения уравнения (44)

$$\max_{i=0, \dots, 20} |y(i/20) - y_{20}(i/20)| = 3 \cdot 10^{-5}; y = \text{ch}(10x-5)/\text{ch}(5); \quad (45)$$

Погрешность аппроксимации функции  $y$  (45) многочленом или сплайном, интерполирующим сеточную функцию  $y_{20}$ , очевидно, больше  $3 \cdot 10^{-5}$ .

Функция  $y$  (45) – аналитическая во всей комплексной плоскости и четная относительно точки  $1/2$ . Отличные от нуля коэффициенты Фурье-Чебышева функции  $y$  (45) на отрезке  $[0,1]$

$$\{(y, \text{cheb}(n, 2x-1))_{L_2(0,1;\rho)}, n = 2, 4, \dots, 18\} := \{0.47, 0.14, 0.021, 2 \cdot 10^{-3}, 1.2 \cdot 10^{-4}, 5.4 \cdot 10^{-6}, 1.7 \cdot 10^{-7}, 4.3 \cdot 10^{-9}, 8.5 \cdot 10^{-11}\} \quad (46)$$

с ростом  $n$  регулярно убывают –  $(y, \text{cheb}(2n, 2x-1))_{L_2(0,1;\rho)} = o(q^n)$ .

Следовательно для величины наилучшего приближения функции  $y$  (45) многочленами степени  $n = 2i$  в пространстве  $C_{[0,1]}$  справедливо тождество

$$E[2i, y, C_{[0,1]}] = (1 + o(1)) \cdot (y, \text{cheb}(2i, 2x-1))_{L_2(0,1;\rho)} \quad (47)$$

Поэтому коэффициент оптимальности метода решения ЛИУМК (44) –  $P_q[y_q]$  – интерполирования сеточной функции  $y_q$  – вычисленной по методу сплайнов [5] с числом узлов  $q$  – сравним с коэффициентом оптимальности метода ряда Тейлора –  $O(2^q)$ . В частности, для  $q=20$

$$C_{20} := \|y - P_{20}[y_{20}]\|_{C_{[0,1]}} / \wedge E[20, y, C_{[0,1]}] > 3 \cdot 10^{-5} / 18 \cdot 10^{-15} = 10^{10}/6$$

Решением ЛИУМК (44) по методу 1 на отрезке  $[0,1]$  является многочлен  $y_n$  (4) и коэффициенты  $\tau_1(n)$ ,  $\tau_2(n)$  невязки

$$(y_n, \tau_1(n), \tau_2(n)) := \text{solve}(F[y_n = \text{main\_pol}(n)] + E(m, n, z(x)) = 0); \quad (48)$$

Многочлен  $y_n$  (48) четный и имеет место тождество  $y_{2i+1} = y_{2i}$ .

Многочлен  $y_n$  (48) аппроксимирует точное решение  $y$  (45) уравнения (44) в пространстве  $C_{[0,1]}$  с погрешностью

$$\{ \| ch(10x-5)/ch(5) - y_n \|_{C_{[0,1]}}, n = 0, 2, \dots, 16 \} := \{ 0.86, 0.22,$$

$$0.028, 2.4 \cdot 10^{-3}, 1.4 \cdot 10^{-4}, 5.8 \cdot 10^{-6}, 1.8 \cdot 10^{-7}, 4.5 \cdot 10^{-9}, 8.8 \cdot 10^{-11} \}; \quad (49)$$

Согласно тождеств (46), (47), (49) имеет место следующий вывод.

**Вывод 1.** Коэффициент оптимальности метода 1 на уравнении (44)

$$C_{2i} = C_{2i+1} \approx \| y - y_{2i} \|_{C_{[0,1]}} / |(y, cheb(2i+2, 2x-1))_{L_2(0,1;p)}| = 1 + \alpha_{2i}, \quad (50)$$

$$\{ \alpha_{2i}, i = 0, \dots, 9 \} := \{ 0.8, 0.6, 0.3, 0.2, 0.1, 0.08, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03 \};$$

Этот коэффициент меньше коэффициента оптимальности решения уравнения (44) методом интерполяции сеточного решения полученного методом сплайнов [5] более чем в  $10^9$  раз.

Один из коэффициентов невязки решения (47) уравнения (44) на отрезке  $[0,1]$  по методу 1 равен нулю –  $\tau_1(2n) = 0$ ,  $\tau_2(2n+1) = 0$ .

Отличный от нуля коэффициент невязки с ростом  $n$  убывает как  $o(q^n)$

$$\{ \tau_2(n), n = 0, 2, \dots, 16 \} := \{ 0.86, 0.22, 0.028, 2.4 \cdot 10^{-3}, 1.4 \cdot 10^{-4}, 5.8 \cdot 10^{-6}, 1.8 \cdot 10^{-7}, 4.5 \cdot 10^{-9}, 8.8 \cdot 10^{-11} \}$$

Согласно этого тождества и тождества (49), и в соответствии с тождеством (26), имеет место следующий вывод.

**Вывод 2.** Норма дополнительного многочлена (14) является эффективной оценкой погрешности метода 1 на уравнении (44)

$$\| y - y_{2i} \|_{C_{[0,1]}} = \| E(m, 2i, 2x-1) \|_{C_{[0,1]}} = | \tau_2(2i) |$$

Мы для уравнения (44) отрезка  $[0,1]$ , параметра  $n = 0, \dots, 18$  вычислили коэффициенты (23), (36):

$$W_i := \| L^{-1}[cheb(i, 2x-1)] \|_{C_{[0,1]}} = 1, i=0, \dots, 18,$$

$$V_{2i} = 1 + \delta_{2i}, \{ \delta_{2i}, i=0, \dots, 9 \} :=$$

$$\{ 0.8, 0.6, 0.3, 0.18, 0.12, 0.08, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03 \};$$

Согласно этих тождеств и тождества (50), и в соответствии с тождеством (35), имеет место следующий вывод.

**Вывод 3.** На уравнении (44) значения коэффициента  $V_n$  (36) являются эффективной оценкой коэффициента оптимальности (50) метода 1

$$C_n = W_{n+2} V_n = V_n, n = 2i$$

## 8. Дополнение.

1. Мы решали а-методом В.К.Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра более широкий класс интегральных уравнений, чем ЛИУМК (1). В частности мы решили уравнения получаемые в результате регуляризации ЛИУМК (1) с

особой точкой ноль (2). Эти уравнения удовлетворяют условиям теорем 1 – 4. Следовательно, теоремы 1 – 4 имеют место для класса линейных интегральных уравнений более широкого чем ЛИУМК (1).

2. Модифицированный а-метод В.К.Дзядыка [2] решения ЛИУМК Вольтера имеет дополнительный многочлен – невязку с двумя параметрами

$$E(q, p, x) := \tau_1 \cdot f_{p+1}(x) + \dots + \tau_{q-p} \cdot f_q(x);$$

Базис этой невязки –  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x), \dots$  – в общем случае, отличен от переноса (14) многочленов Чебышева (13) на отрезок аппроксимации  $[a, b]$ .

Сходимость модифицированного а-метода В. К. Дзядыка не доказана.

Пусть модифицированный а-метод В. К. Дзядыка имеет:

– базис – ортогональный базис пространства Гильберта  $H$  функций аналитических в окрестности точки ноль и  $\deg(f_i(x)) = i, i = 0, 1, \dots,$

– параметры невязки  $q := \deg(F[\text{main\_pol}(n)])$ ;  $p := n$ ;

Тогда для этого метода, очевидно, имеют место аналоги теорем 1, 2, 3 и 4.

В этих теоремах пространство  $L_2(a, b; \rho)$  заменяется на пространство  $H$ .

3. Специальные математические функции часто аппроксимируют в области комплексной плоскости:

–  $B(0, r)$  – замкнутый круг с центром в точке ноль радиуса  $r$ ,

– эллипс с фокусами в концах отрезка  $[a, b]$  и других. Оценка погрешности метода 1 в такой области непосредственно следует из тождества (21) и оценок поведения  $L^{-1}[\text{cheb}(i, z(x))]$  – результата преобразования оператором  $L^{-1}$  многочленов базиса невязки – в этой области.

Для оценки погрешности модифицированного а-методом В. К. Дзядыка, с базисом удовлетворяющим приведенным выше требованиям, в метрическом пространстве  $E$ , очевидно, имеют место аналоги теорем 3 и 4. В этих теоремах пространство  $L_2(a, b; \rho)$  заменяется на пространство  $H$  и пространство  $C_{[a, b]}$  заменяется на пространство  $E$ .

#### БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1957 – 584 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988 – 387 с.
3. Денисенко П.Н., Летичевский А.А. Алгебраическое программирование. Кировоград: КННПК, 2002 – 120 с.
4. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969 – 456 с.
5. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972 – 316 с.

УДК 519.6

## АПРОКСИМАЦІЯ ТА ПРОГНОЗ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

**О.М. Дрєєв , З.Ю. Філер**

Рассмотрена последовательная аппроксимация методом наименьших квадратов тригонометрическим полиномом сигналов, которые содержат некрратные гармоники, с целью экстраполяции. Такие сигналы не являются периодическими и для прогнозирования их поведения стандартные Фурье и вейвлет-преобразования непригодны. Приведено описание алгоритма аппроксимации, выведена вероятностная оценка ошибки экстраполяции.

In the article successive approximation by a least-squares method is considered by the trigonometric polynomial of signals which contain aliquant accordions, with the purpose of extrapolation. Such signals are not periodic and for prognostication of their conduct standard Fourier and wavlet transformations are useless. Description of algorithm of approximation is resulted, estimation of error of extrapolation is shown out.

При традиційному проведенні гармонічного аналізу функція, що досліджується, вважається періодичною і розглядаються експериментальні дані на проміжку одного періоду [2, 26 с.]. Завдяки таким припущенням виконання екстраполяції для прогнозу поведінки систем стає неможливим. Для практичного використання в прогнозуванні плинину природного процесу й призначена регресія (розклад) функції, що досліджується в тригонометричний ряд з некрратними гармоніками.

Задача полягає в апроксимації сигналу, заданого значеннями на (можливо нерівномірній) сітці часу неперіодичних коливних процесів, що містять в собі некрратні гармоніки. Розглядаємо наближення експериментальних даних функцією  $g(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$ , де  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\omega$  – невідомі коефіцієнти.

Дано:  $f(t_i)$  – значення функції що досліджується в моменти часу  $t_i$ , де  $i=1..N$ ,  $N$  – натуральне число; потрібно визначити коефіцієнти  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\omega$  так щоб

$$S(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 \sin(\omega t_i) + a_2 \cos(\omega t_i) - f(t_i))^2 = \min. \quad (1)$$

Для знаходження  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  використовується метод найменших квадратів.

Знайдемо частинні похідні функції  $S(\omega)$  та прирівняємо їх до нуля, утворюючи систему рівнянь, розв'язок якої дає мінімум середньоквадратичного відхилення [3]:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \overline{\sin(\omega t)} + a_2 \overline{\cos(\omega t)} - 2 \overline{f(t)} &= 0, \\ a_0 \overline{\sin(\omega t)} + a_1 \overline{\sin^2(\omega t)} + a_2 \overline{\sin(\omega t) \cos(\omega t)} - \overline{f(t) \sin(\omega t)} &= 0, \\ a_0 \overline{\cos(\omega t)} + a_1 \overline{\sin(\omega t) \cos(\omega t)} + a_2 \overline{\cos^2(\omega t)} - \overline{f(t) \cos(\omega t)} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\frac{1}{N} \sum_i v(t_i) = \overline{v(t)}$ , де  $N$  – кількість доданків,  $i$  – індекс сумування.

Розв'язком системи рівнянь (2) є значення коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2$ . Це дає можливість визначити функцію, яка має мінімальне середнє квадратичне відхилення при заданій частоті  $\omega$ . За допомогою чисельного методу шукається мінімум функції середнього квадратичного відхилення від частоти  $S(\omega)$ . Цей мінімум буде найкращим середньоквадратичним наближенням коливною функцією на проміжку дослідження експериментальних даних [1, 64с.].

Пошук величини  $\omega$  обмежується частотою Котельникова-Найквіста: при дискретизації сигналу з кроком в часі  $h$ , сигнал можна відновити однозначно, якщо він не містить складові частоти, вищої за  $\omega = \pi/(2h)$ . Теоретично нижня границя частот обмежена нулем, але для практичних розрахунків нижня межа частот обмежується трьома - десятьма проміжками дослідження сигналу.

### Залежність локальних мінімумів од довжини проміжку аналізу сигналу для $\sin(t)$

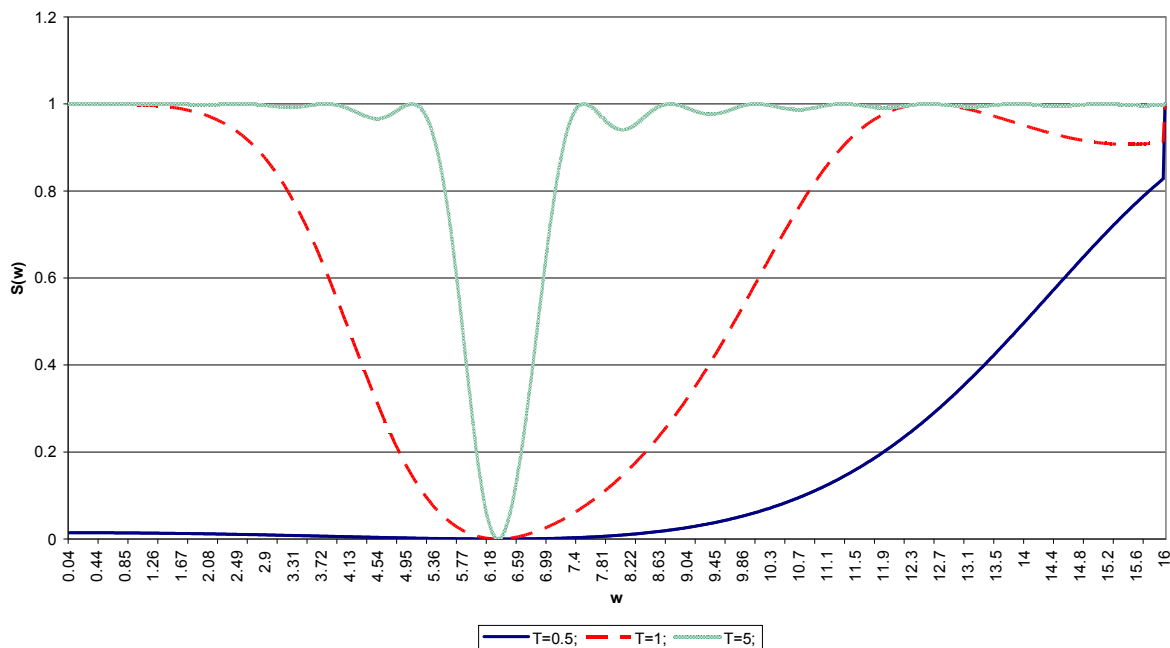


Рис. 1

Функція  $S(\omega)$  має коливний характер (рис. 1), з локальними мінімумами в частотах базису тригонометричних функцій Фур'є (приклад побудовано для аналізу функції  $y(t)=\sin(t)$ ). Визначити оціночні значення локальних мінімумів  $\omega_k$  можна з часу спостереження сигналу  $T=t_n-t_0$ . У базис Фур'є входять кратні частоти до періоду спостереження, тому  $\omega_k=2\pi k/T$ , де  $k$  – натуральне число. З рисунку 2 робиться висновок, що кількість точок

розбиття (дискретизація сигналу) мало впливає на положення локальних мінімумів, але вносить спотворення зміщення частоти Найквіста  $\omega_H$ .

Знаходиться мінімальне значення таблично отриманої  $S(\omega)$ , розбивши проміжок шуканих  $[\omega_0; \omega_H]$  частот на рівномірні проміжки кількістю, більше ніж

$$N_\omega = 3 \frac{\omega_H - \omega_0}{2\pi} (t_n - t_0), \quad (3)$$

Подальше уточнення частоти проводиться довільним чисельним методом, наприклад дихотомією.

Залежність локальних мінімумів до кількості точок розбиття для  $\sin(t)$

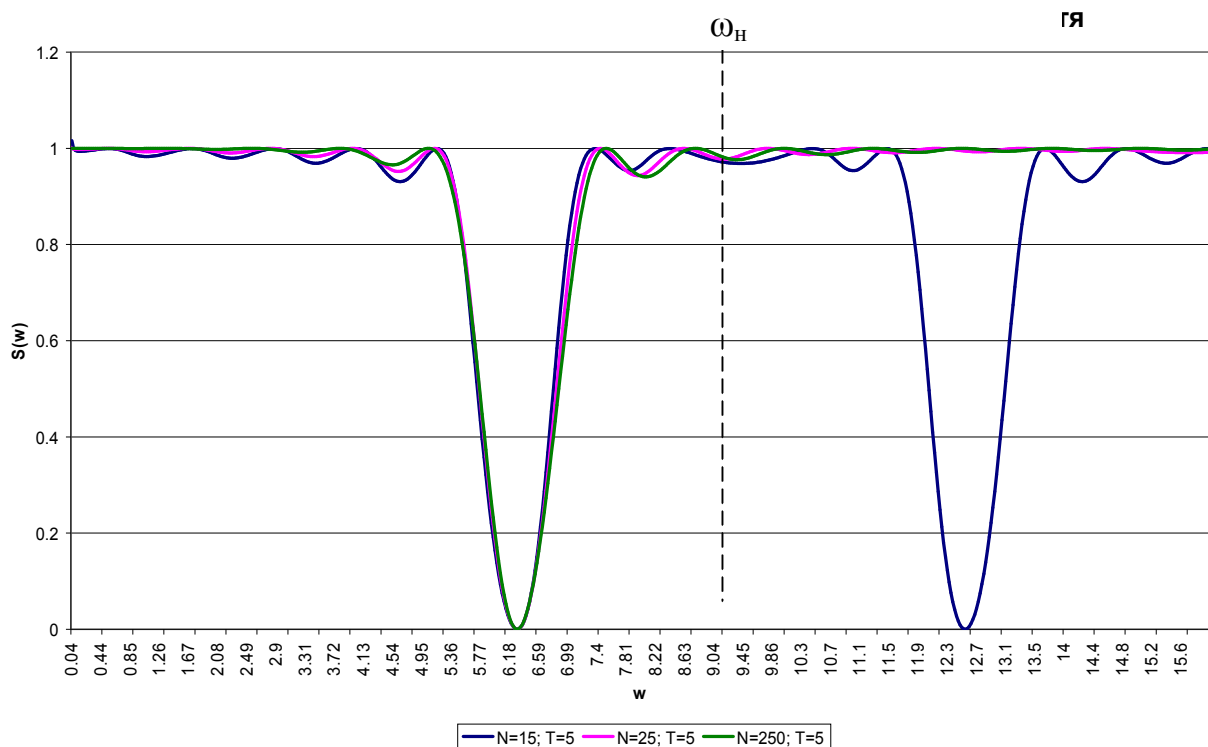


Рис. 2

Послідовне наближення функції тригонометричним поліномом дає апроксимацію:

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^K g_i(t), \quad g_i(t) = a_{0,i} + a_{1,i} \sin(\omega_i t) + a_{2,i} \cos(\omega_i t). \quad (4)$$

Процедура описується алгоритмом:

1. Для функції  $f(t)$  шукаємо наближення  $g_1(t)$  знаходимо функцію відхилень  $f_1(t) = f(t) - g_1(t)$ .
2. Повторюємо п. 1 для наближення  $f_1(t)$  і отримуємо  $f_2(t), g_2(t)$ .
3. Дія повторюються до досягнення бажаної точності наближення (на кожному кроці маємо середнє квадратичне відхилення та набір відхилень наближення від реальних даних).

Виконання алгоритму дає гарантоване середньоквадратичне наближення (4) не гірше за ряд Фур'є, бо використовується ширший набір базисних функцій.

Головною метою розробки методу наближення тригонометричним многочленом є проведення прогнозування майже періодичних процесів, але для побудови прогнозів потрібно мати оцінку їх надійності.

Класично аналіз надійності наближення полягає в оцінці точності знаходження періоду та фази складових сигналу. При дослідженні ж майже періодичного сигналу, де період не стабільний, або сигнал складається з суми двох некратних частот, точне визначення періоду неможливе, бо він не існує. Автори дають ймовірність надійного прогнозу на заданому інтервалі.

Будемо вважати досліджуваний сигнал таким, що він містить у собі випадковий набір гармонічних коливань. Такий процес є ергодичним і для нього справедливе співвідношення:

$$\tau_p = \frac{1}{R_y(0)} \int_0^{\infty} |R_y(s)| ds. \quad (5)$$

Тут  $\tau_p$  – порядок часу, на який має сенс прогнозування процесу, а границя

$$R_y(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(x)y(x-s)dx - \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(x)dx \right)^2$$

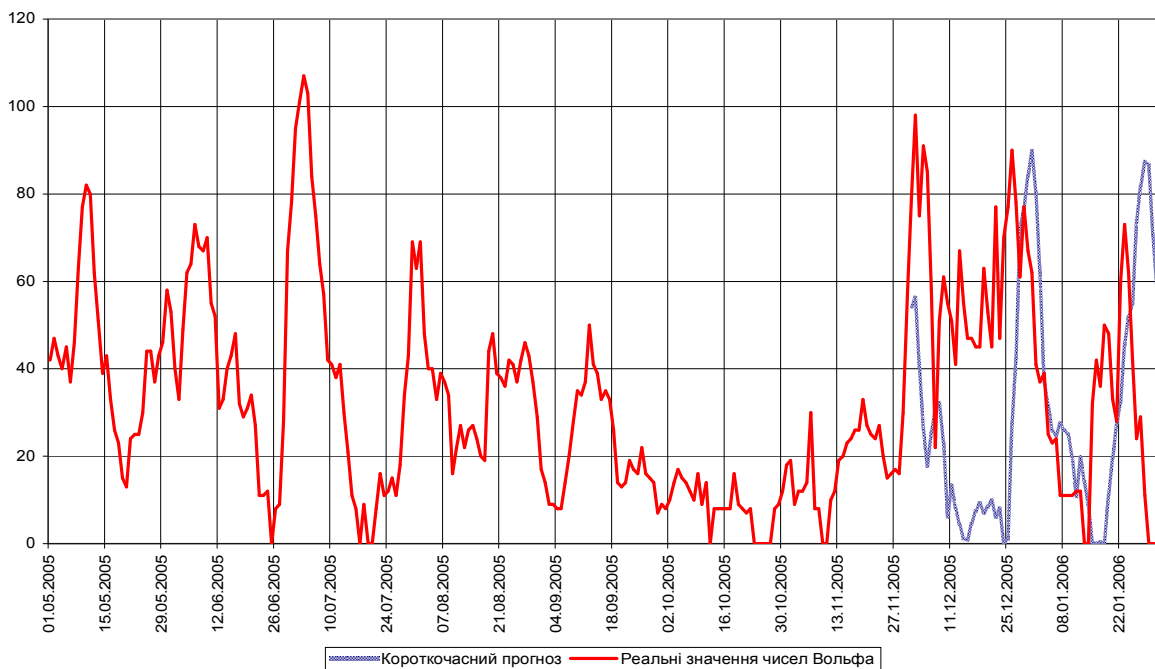
є кореляційною функцією досліджуваного сигналу.

Вважаємо відхилення  $f_{k+1}(x_i)$  випадковою величиною, підпорядкованою нормальному закону розподілу з нульовим математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням  $I_k(\omega_k)$ . Допустима норма  $b$  відхилення реального сигналу від прогнозу; ймовірність того, що ця норма не буде перевищена є

$$P_H \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot I_k(\omega_k)} \int_{-b}^b \exp(-l^2 / (2I_k(\omega_k))) dl \right)^n,$$

де  $n$  – кількість кроків прогнозу;  $l$  – змінна інтегрування. В цьому випадку час прогнозування  $t_H = hn$ , з ймовірністю  $P_H$  є надійним для  $[-b; b]$ . В реальних розрахунках прогнозування має значно більшу точність, бо при оцінці ймовірності перевищення похибки прогнозування враховувався найгірший варіант розвитку подій.

### Короткочасний прогноз чисел Вольфа (базові дані за 180 діб, прогноз на 60 діб)



**Рис. 3**

Для перевірки можливостей методики прогнозування поведінки числових рядів, було проведено амплітудно-частотний аналіз середньорічних даних сонячної активності за 1749-2000 роки [4]. Частотний аналіз процесу зміни сонячної активності показує наявність на фоні майже періодичного основного сигналу стохастичної складової. Вона має певні частоти, але фаза коливань стохастичної складової та її амплітуда є випадковою величиною. За припущенням авторів збудниками стохастичних коливань є турбулентні збурення та вибухи на поверхні Сонця, а синхронізуючим фактором основних коливань сонячної активності є блукання центру Сонця навколо центру мас Сонячної системи під дією гравітації планет-гігантів. Ці чинники впливають на принципи побудови прогнозів зміни сонячної активності. Для довгострокових прогнозів врахування стохастичної складової є недоречним з огляду на нестабільність та малий, в середньому, вплив на довготривалі процеси. Тому для довгострокового прогнозування змін сонячної активності (СА) було взято середньорічні значення СА. Практична перевірка надійності прогнозування на довгостроковий період проводилася при побудові «прогнозу» в минуле до 1650 року включно. Отриманий прогноз досить точно відобразив дійсну картину змін сонячної активності – було чисельно отримано аномальне падіння сонячної активності, що відбувалося реально і відоме як «мінімум Маундера».

Короткочасні прогнози щоденних значень чисел Вольфа проводилися на строк від одного до трьох місяців, бо випадковість виникнення малопотужних коливань не прогнозується, а екстраполюється вже наявні збурення та частоти. Тому базою для проведення екстраполяції є період

спостережень близько шести місяців. В цих випадках прогнозування дає найкращі результати на проміжках стабільної зміни сонячної активності, при тенденціях зростання та спадання в середньому сонячної активності, прогнозування якісно відображає лише фазову характеристику, амплітудна ж характеристика в частині випадків не відповідала дійсності. Графіки змін сонячної активності та їх прогнози показані на рис.3 для довгострокового прогнозування та на рис.4 для короткострокового прогнозування.

### “Передбачення” аномального зниження середньомісячних чисел Вольфа екстраполяцією в минуле

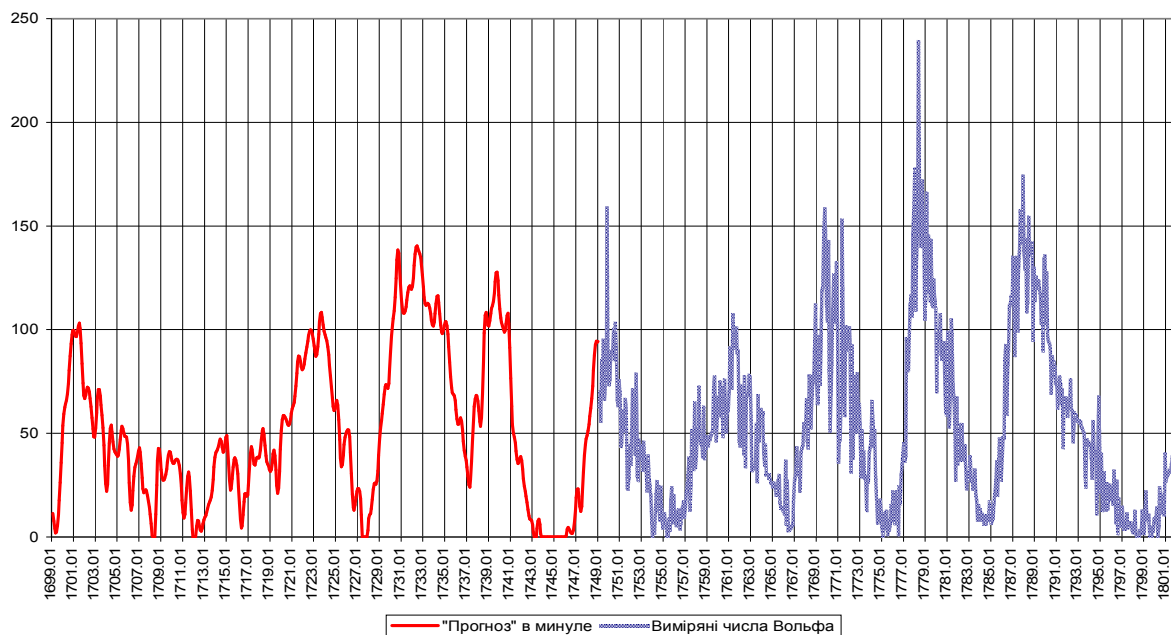


Рис. 4

Для підвищення точності прогнозів поведінки числових рядів автори планують визначити оптимальний проміжок інтерполяції сигналу та на його основі – оптимальний проміжок екстраполяції. Оцінка ймовірності можливих відхилень прогнозування є досить грубою, тому вона вимагає значного уточнення. Планується значно підвищити точність апроксимації та екстраполяції сигналів, врахувавши поточний коефіцієнт “затухання” коливного сигналу, що додає ще одну умову на дослідження сигналу – виміри сигналу, що досліджується, повинні бути рівномірними в часі.

Розроблені алгоритми застосовуються для прогнозування [5] стану здоров'я та психіки людей внаслідок щоденних змін СА, на 7-30 діб, який розміщується в ЗМІ, зокрема, в газеті “Моя Батьківщина/Моя Родина”, яка виходить у Харкові, та прогнозів метеоданих та врожаїв найближчих років.

### Висновки

1. Розроблено чисельний алгоритм апроксимації сигналу не ортогональним базисом коливних функцій.
2. Побудована ймовірнісна оцінка похибки екстраполяції, що дозволяє прогнозувати числові послідовності. На практиці при дослідженні

змін сонячної активності було «прогнозовано» в минуле аномальний мінімум Маундера сонячної активності в 1650-1750 роках.

3. Визначено оптимальне початкове розбиття для уточнення основної частоти апроксимуючої функції.
4. Розроблено програму для проведення апроксимації та отримання прогнозів поведінки числових рядів.
5. Розроблена програма застосована до аналізу та прогнозуванню щоденних, середньомісячних та середньорічних значень чисел Вольфа – характеристики СА для розробки її прогнозів на різні терміни.
6. Досліджена кореляція середньорічних значень СА з кліматичними змінами, та середньомісячних – з погодними змінами.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Дреєв О.М., Філер З.Ю. Спектральний аналіз майже періодичних сигналів// Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Збірник наукових праць. Випуск 4. Том 3. - Кривий Ріг. Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – С.64-68.
2. Блатер К. Вейвлет - аналіз. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004. - 274 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989, 608 с.
4. <http://www.spaceweather.com/>
5. Філер З.Ю. Яка погода буде наступного 2004 року в Космосі, на Землі та в Соціумі? – Кіровоград:Центр.-Укр. видав., 2004. – 24с.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 18 березня 2006 р.*

УДК 517.54

## ІНТЕГРАЛ ШВАРЦА ДЛЯ ЗЧИСЛЕННО-ЗВ'ЯЗНОЇ КРУГОВОЇ ОБЛАСТІ\*)

Л.О.Дундученко

Построена формула, обобщающая известную формулу Шварца на случай счетно-связной круговой  $\delta$ -области, у которой центры граничных окружностей расположены на конечном числе прямых, принадлежащих одному пучку. С помощью этой формулы можна восстановить регулярную и однозначную функцию достаточно общего вида внутри рассмотренной области по значениям её вещественной части на границе области.

A formula is found which generalizes the already known Schwarz formula for the case of calculated-connected circular  $\delta$ -domain which has not more than a calculated set of cluster points of boundary components. The value of each single-value and regular function of a rather wide class in the middle of the domain may be established by means of this formula if the values of its real part on the domain boundary are known.

1. Будемо розглядати зчисленно-зв'язані кругові  $\delta$ -області  $B_\infty$  на  $z$ -площині, що визначаються умовами: 1)  $B_\infty$  є повна  $z$ -площина, з якої вилучено зчисленну множину кругів  $|z - a_k| \leq R_k$ ,  $|a_j - a_k| > R_j + R_k$  при  $j \neq k$ ;  $j, k = 1, 2, \dots$ ; 2) центри всіх граничних кіл  $\Gamma_k$ :  $|z - a_k| = R_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , мають щонайбільше зчисленну кількість точок скупчення  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в тому числі, можливо, й точку  $\xi_0 = \infty$ ; 3)  $B_\infty$  має властивість  $\delta$ -ізолюваності, тобто існує таке фіксоване число  $\delta$ ,  $\delta > 0$ , що перетин двох кілець  $Q_k^{(\delta)}: R_k < |z - a_k| < R_k(1 + \delta)$  і  $Q_j^{(\delta)}: R_j < |z - a_j| < R_j(1 + \delta)$  є порожня множина при  $j \neq k$ ;  $j, k = 1, 2, \dots$ .

Через  $\bar{B}_\infty$  позначимо замикання області  $B_\infty$ ,  $\bar{B}_\infty \equiv B_\infty \cup \partial B_\infty \cup \{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ .

2. Розглянемо в області  $B_\infty$  клас  $\mathfrak{Z}(B_\infty)$  однозначних та регулярних функцій  $w = f(z)$ , що мають властивості: 1)  $f(z)$  неперервна в  $\bar{B}_\infty$ ; 2) якщо  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , то  $\max|u(z)| \leq b_n$  й  $\sum_{n=1}^\infty b_n < +\infty$ . Цей клас – непорожній.

Наприклад, нехай  $B_\infty$  така, що  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 2^n$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_n \leq \frac{1}{4}$ ,  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ , тоді

$w = \ln \frac{2z + 1}{2z - 1} \in \mathfrak{Z}(B_\infty)$ , ( $\ln 1 = 0$ ). Інші нетривіальні приклади функцій класу

$\mathfrak{Z}(B_\infty)$  впливають безпосередньо з результатів Грьотша [1] та з інших [2,3].

\*) Ця публікація – передрук (за згодою автора – випускника Кіровоградського державного педагогічного інституту 1951 року) статті автора з ДАН УРСР, №9 Сер.А, 1972, с.778-781.

3. Будемо розглядати сім'ю функцій

$$(1) \quad w = F_k(z; \zeta_k), k = 1, 2, \dots, (\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}; z \in B_\infty)$$

Кожна функція цієї сім'ї при фіксованому  $\zeta_k$  однолисто відображає  $B_\infty$  на праву півплощину з скінченними та прямолінійними купюрами, паралельними уявній осі так, що  $\Gamma_k$  переходить в уявну вісь та в кільці  $Q_k^{(\varepsilon)}$  цю функцію можна подати у вигляді

$$(2) \quad F_k(z; \zeta_k) = \frac{z + \zeta_k - 2a_k}{z - \zeta_k} + \psi_k(z; \zeta_k).$$

Тут  $\psi_k(z; \zeta_k)$ - однозначна функція, неперервна по  $\zeta_k$ ,  $\zeta_k \in \Gamma_k$ , та регулярна в кільці

$$R_k(1 - \varepsilon) < |z - a_k| < R_k(1 + \varepsilon)$$

де  $0 < \varepsilon < \delta$ ,  $\varepsilon$  – досить мале число, що не залежить від  $k$ ,  $k=1, 2, \dots$ . На колі  $\Gamma_k$  ця функція набирає чисто уявних значень, і нормується у вищезгаданому кільці розкладом

$$(3) \quad \psi_k(z; \zeta_k) = \dots + \frac{c_{-1}(\zeta_k)}{z - a_k} + c_1(\zeta_k)(z - a_k) + \dots$$

Отже,

$$\operatorname{Re} F_k(\zeta_k^*; \zeta_k) \equiv p_k^{(k)} = 0, \zeta_k^* \in \Gamma_k, k = 1, 2, \dots;$$

$$(4) \quad \operatorname{Re} F_k(\zeta_j; \zeta_k) \equiv p_j^{(k)}(\theta) > 0, (\zeta_j^* \in \Gamma_j; j \neq k)$$

є неперервні функції  $\theta, \theta = \arg(\zeta_k - a_k), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , і якщо  $\theta = \text{const}$ , тобто  $\zeta_k \in \Gamma_k$ -фіксоване, то і  $p_j^{(k)} = \text{const} > 0$ .

Існування та єдиність таких функцій впливає з відомої теореми Гільберта [4] про відображення на площину з паралельними купюрами та з принципу симетрії.

4.Л е м а 1. Нехай  $M, M \subset B_\infty$ -довільний компакт. Якщо  $z \in M$ , то для кожного  $n, n=1, 2, \dots$ , має місце оцінка

$$(5) \quad F_n(z; \zeta_n) \leq C(\delta; M),$$

де стала  $C \equiv C(\delta; M)$  залежить лише від  $\delta$  та вигляду  $M$ .

Доведення. Нехай  $n$ - довільне натуральне число, яке ми зафіксуємо. Припустимо спочатку, що  $M \cap Q_n^{(\delta)}$  – непорожня множина. Оскільки  $\operatorname{Re} F_n(z; \zeta_n) > 0$  при  $z \in Q_n^{(\delta)}$  та  $\int_\gamma F_n(z; \zeta_n) \cdot (z - a_n)^{-1} dz = 2\pi i$ , де

$\gamma: |z - a_n| = \rho, R_n < \rho = \text{const} < R_n(1 + \delta)$ , то  $F_n(z; \zeta_n)$  можна подати в  $Q_n^{(\delta)}$  структурною формулою [5]

$$(6) \quad F_n(z; \zeta_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(te^{-i\theta}) d\mu_{1\zeta_n}(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{\rho}{t} e^{i\theta}\right) d\mu_{2\zeta_n}(\theta) - 1$$

де  $z \in Q_n^{(\delta)}$ ;  $t = \frac{z - a_n}{R_n(1 + \delta)}$ ;  $q = \frac{1}{1 + \delta} < 1$ ;  $\mu_{i\zeta_n}(\theta)$ ,

$j=1,2$ -неспадні на відрізку функції, нормовані умовами

$$(7) \quad \mu_{i\zeta_n}(-\pi + 0) = \mu_{i\zeta_n}(-\pi) = 0; \mu_{i\zeta_n}(\pi) = 2\pi,$$

інтеграли розуміємо як стільтьєсові. Нарешті,

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (x^n - x^{-n}), q < |x| < 1.$$

Покладемо  $d = \inf |z - \zeta_n| > 0, z \in M$ . Тоді за принципом максимуму модуля одержимо  $|F_n(z; \zeta_n)| \leq |F_n(\xi; \zeta_n)|$ , де  $z \in M$ , а  $\xi$  - деяка точка кола  $|z - a_n| = R_n(1 + d), 0 < d < \delta$ .

Відомо [6], що має місце точна оцінка

$$(8) \quad |F_n(\xi; \zeta_n)| \leq F(r) + F\left(\frac{q}{r}\right) - 1 \equiv C(\delta, M)$$

де  $q < r = \frac{1+d}{1-d} < 1$ , й права частина залежить лише від  $\delta$  та вигляду  $M$ , що й

потрібно було довести у цьому випадку. Якщо ж  $M \cap Q_n^{(\delta)}$  - порожня множина, то доведення леми випливає з нерівності

$$\max_{z \in M} |F_n(z; \zeta_n)| \leq \max_{z \in \mathbb{N}} |F_n(z; \zeta_n)|$$

де  $M \subset C$ , а  $C$ - компакт з  $B_\infty$  такий, що  $C \cap Q_n^{(\delta)}$  - не порожня множина.

Лему доведено.

Л е м а 2. (див, наприклад, [7]). Якщо  $u_1$  та  $u_2$  дві однозначні та регулярні в  $B_\infty$  гармонічні функції, неперервні в  $B_\infty$ , такі, що збігаються на границі  $\partial B_\infty$ , то  $u_1 \equiv u_2$  в  $B_\infty$ .

5. Побудуємо тепер формулу Шварца для класу  $\mathfrak{Z}(B_\infty)$ . Нехай  $f(z) \in \mathfrak{Z}(B_\infty)$ . Покладемо  $u_n(\theta) = \operatorname{Re} f(a_n + R_n e^{i\theta}), 0 \leq \theta \leq 2\pi; n = 1, 2, \dots$  з властивостей функцій класу  $\mathfrak{Z}(B_\infty)$  випливає неперервність  $u_n(\theta)$  на відрізку  $[0; 2\pi]$  та її періодичність з періодом  $2\pi$ . Припустимо, що функції  $u_n(\theta), n=1, 2, \dots$  задано.

Побудуємо однозначну та регулярну функцію  $w=f(z)$  класу  $\mathfrak{Z}(B_\infty)$  (з точністю до чисто уявної сталої), яка задовольняє умови  $u_n(\theta) = \operatorname{Re} f(a_n + R_n e^{i\theta})$ . З цією метою розглянемо функцію

$$(9) \quad \zeta(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\theta) F_n(z; a_n + R_n e^{i\theta}) d\theta$$

Ця функція однозначна і регулярна в  $B_\infty$ , бо  $F_n(z; \zeta_n)$  неперервно залежить від параметра  $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , а ряд за лемою 1 збігається рівномірно та абсолютно в області  $B_\infty$ . Якщо тепер  $z \rightarrow \zeta_k^0$  зсередини  $B_\infty$  по довільному

шляху,  $\zeta_k^0 = a_k + R_k e^{i\theta_k^0}$  ( $k=1,2,\dots$ ), то з властивостей функцій (2) та з властивостей інтеграла Пуассона для області  $|z - a_k| \geq R_k$  випливає, що

$$(10) \quad \lim_{z \rightarrow \zeta_k^0} \operatorname{Re} \Pi(z) = u_k(\theta_k^0) + \lambda_k$$

де

$$(11) \quad \lambda_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_v(\theta) p_k^{(v)}(\theta) d\theta = \operatorname{const} (k=1,2,\dots).$$

Покажемо, що  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda = \operatorname{const}$ . ( $\|\lambda\| < \infty$ ). Для цього розглянемо однозначну та регулярну в  $B_\infty$  функцію  $f(z) - \Pi(z) = u_0(z) + iv_0(z)$ . Зрозуміло, що  $u_0(z)$  - однозначна гармонічна та обмежена в  $B_\infty$  функція. Доведемо, що  $u_0(z) \equiv \operatorname{const}$ . Дійсно, яким би не було число  $h$ , геометричне місце точок області  $B_\infty$ , де  $u_0(z) = h$  не може мати кратних точок або бути замкненою кривою, бо інакше  $u_0(z) + iv_0(z)$  була б неоднозначною в  $B_\infty$ . Отже, всі криві в  $B_\infty$ , де  $u_0(z) = h$ , повинні закінчуватись або на граничних колах  $\Gamma_n$ ,  $n=1,2,\dots$  або в точках скупчення  $\xi_n$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , яких за умовою, зчисленна множина. Але тоді  $h$  є одне з таких чисел: або  $\lambda_n$ ,  $n=1,2,\dots$ , або  $u_0(\xi_n)$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , тобто, виявляється, що  $u_0(z)$  є неперервна в  $\bar{B}_\infty$  і приймає лише зчисленну множину значень. Це й приводить до абсурду, якщо серед вищезазначених чисел є неоднакові.

Отже, приймаючи до уваги вищевикладене та лему 2, маємо

$$(12) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(\theta) F_n(z; a_n + R_n e^{i\theta}) d\theta - \lambda + i\beta,$$

де  $\beta$  - довільна дійсна стала, а  $\lambda = \operatorname{const}$ , що визначається за формулою (11), причому  $k$  може бути довільним натуральним числом.

Формула (12) і є шукана формула Шварца для класу  $\mathfrak{Z}(B_\infty)$ .

### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Grotzsch H. Uber konforme Abbildung unendlich vielfach zusammenhangender schlichter Bereiche mit endlich vielen Haufungsrandkomponenten //Leipz.Ber., 81, 2, 51 (1929), 51-86.
2. Koebe P. //Gotting. Nachr., 112, 337 (1908), 68 (1909).
3. Georgi K., Diss., Jena, 1915.
4. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. - М.: ИЛ, 1953.
5. Заморович В.А. // ДАН СССР, 86, 465 (1952).
6. Dunducenko L.E. // Anal. Rom.-Soviet, Mat. - Fiz., 3/3 (1959).
7. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного, т.2. - М.: ИЛ, 1952.

Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 21 жовтня 2005 р.

УДК 511

## ПРО ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН

**В.М. Євладенко , Л.В. Євладенко , Ю.П. Пігарьов**

Дається короткий огляд результатів про залежність між інваріантами  $T$  і  $R$  в структурній теорії додавання множин. Акцентується увага на окремих ще не розв'язаних проблемах.

This is a short survey of some results of invariant  $T$  and  $R$  interdependence in the sets adding structural theory. The emphasis is made on some problems which haven't been investigated yet.

Загальноприйняті позначення:  $K = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$  – множина різних цілих чисел;  $T(2 \cdot K) = T$  – число різних сум, утворених елементами множини  $K$  і  $K$ ;  $R$  – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини  $K$ ;  $2 \cdot R + 1 = \bar{R}$ .

В 1966 році угорський математик П.Ердеш висунув припущення, що  $T \leq \bar{R}$ . Здавалось правдоподібним, що має місце також і нерівність  $T \geq R + k$ , де  $k$  – кількість елементів множини  $K$ . Тобто існувала гіпотеза, що

$$R + k \leq T \leq \bar{R} . \quad (1)$$

Але, як пізніше виявилось [1, 173], існують множини, для яких  $T > \bar{R}$ . Зокрема, такою є множина  $K_1 = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$ . Вона складається з чотирьох відрізків послідовних цілих чисел:  $[0, 1, 2]$ ,  $[4, 5]$ ,  $[9]$ ,  $[12, 13, 14]$ . При цьому множина  $K_1$  має властивість *самоущільнення*: кількість цілих чисел третього відрізка /тобто 1/ дорівнює кількості відсутніх впорядкованих цілих чисел між першим і другим відрізками, тобто 1, адже відсутнім є одне число 3. Число ж цілих чисел четвертого відрізка (тобто 3) дорівнює числу відсутніх впорядкованих цілих чисел між другим і третім відрізками, тобто 3, адже відсутніми є три числа: 6, 7, 8.

Доведено, що для множин, які складаються з трьох відрізків послідовних цілих чисел, значення  $T$  і  $R$  задовольняють нерівностям (1).

В теоремі 1 роботи [2, с.52] будуються класи множин, для яких різниця  $T - \bar{R}$  дорівнює будь-якому наперед заданому непарному натуральному числу. З цією метою розглянемо такі множини цілих чисел:

$$\{4 + 12s, 5 + 12s, 9 + 12s, 12 + 12s, 13 + 12s, 14 + 12s, \} = L_s, s \in N \cup \{0\};$$

$$\{0, 1, 2\} = A; A \cup L_0 = K_1; K_1 \cup L_1 = K_2, \dots, K_{n-1} \cup L_{n-1} = K_n \quad (n \in N).$$

При цьому:  $T(2 \cdot K_s) = T_s$ ,  $R_s$  – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини  $K_s$ , а  $2 \cdot R_s + 1 = \bar{R}_s$  ( $s \in N$ ).

Методом математичної індукції доводиться, що при будь-якому натуральному  $n$  для цих множин мають місце рівності:

$$T_n = 4 + 24n, \bar{R}_n = 5 + 22n . \quad (2)$$

Виходячи з цих нерівностей, будуються множини, для яких різниця  $T - \bar{R}$  дорівнює будь-якому наперед заданому непарному натуральному числу, оскільки  $T_n - \bar{R}_n = 2n - 1$ .

В теоремі 2 цієї ж роботи додатково вводяться такі множини:  $\{4 + 12n, 5 + 12n\} = B$ ;  $K_n \cup B = K'_n$ ;  $T(2 \cdot K'_n) = T'_n$ ;  $R'_n$  – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини  $K'_n$ ;  $2 \cdot R'_n + 1 = \bar{R}'_n$  і доводиться, що при будь-якому натуральному  $n$  маємо:

$$T'_n = 11 + 24n, \quad \bar{R}'_n = 11 + 22n. \quad (3)$$

Виходячи з рівностей (3), можна будувати множини, для яких різниця  $T - \bar{R}$  дорівнює будь-якому наперед заданому парному натуральному числу, оскільки  $T'_n - \bar{R}'_n = 2n$ .

Отже, узагальненням теорем 1 і 2 є твердження: існують множини, для яких різниця  $T - \bar{R}$  дорівнює будь-якому наперед заданому натуральному числу.

Тут же [2, с.54] вказано ще один спосіб одержання множин з додатною різницею  $T - \bar{R}$ , пов'язаний з використанням поняття *подібних* множин. Цим способом будуються множини, для яких  $T - \bar{R} = n$ , причому кожна з них породжує зчисленну множину подібних їй множин з такими ж самими величинами різниць  $T - \bar{R}$ .

В теоремі 3 [2, с.55] використовуються дві множини  $K_n$  і  $K'_n$ , які будуються індуктивно.

Множина  $K_n$  одержується наступним чином:

якщо  $L_1 = \{0, 1, 2, 4, \dots, 2k\}$ , а  $L_S = \{a, a + 1, a + 2, a + 4, \dots, a + 2k\}$ , то  $L_{S+1} = \{2(a + 2k) + 1, (a + 2k) + 2, 2(a + 3k) + 3, 2(a + 2k) + 5, \dots, 2(a + 2k) + 2k + 1\}$  і  $\bigcup_{S=1}^n L_S = K_n$  при будь-якому натуральному  $n$ .

Множина  $K'_n$  будується так:

нехай  $L'_n = \{0, 1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1\}$  і якщо  $L'_S = \{a, a + 1, a + 3, a + 5, \dots, a + 2k + 1\}$ , то  $L'_{S+1} = \{2(a + 2k + 1) + 1, 2(a + 2k + 1) + 2, 2(a + 2k + 1) + 4, \dots, 2(a + 2k + 1) + 2k + 2\}$ , і  $\bigcup_{S=1}^n L'_S = K'_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). При цьому  $T(2K_n) = T_n$ ,  $T(2K'_n) = T'_n$ , а число різних додатніх різниць, утворених елементами множин  $K_n$  і  $K'_n$ , відповідно дорівнює  $R_n$  і  $R'_n$ .

Методом математичної індукції доводиться, що для побудованих множин  $K_n$  і  $K'_n$  при будь-яких натуральних  $k$  і  $n$  мають місце рівності:

$$R_n = 2k + (4k + 1) \frac{n(n-1)}{2}, \quad T_n = (3k + 2) \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{і}$$

$$R'_n = (2k + 1) + (4k + 3) \frac{n(n-1)}{2}, \quad T'_n = (3k + 3) \frac{n(n+1)}{2}.$$

Як наслідок з цієї теореми одержуємо, що при  $n=7$   $R_7 - T_7 = 2k - 35$  і при  $k \geq 18$  різниці  $R-T$  дорівнюють будь-яким наперед заданим непарним натуральним числам, а  $R'_7 - T'_7 = 2k - 20$  і при  $k \geq 11$  різниці  $R' - T'$  дорівнюють будь-яким наперед заданим парним натуральним числам. Отже, побудовано множини, для яких різниці  $R-T$  дорівнюють будь-яким наперед заданим натуральним числам, тобто  $R-T=n$ .

В роботі [3, с.52] доводиться теорема 4, яка є узагальненням теореми 3

[2, с.55]. З цією метою будуються спеціальні множини  $K_n$ , для яких при будь-яких натуральних  $k$  і  $n$  мають місце рівності:

$$R_n = R_1 + \bar{R}_1 \cdot \frac{n^2 - n}{2}, \quad T_n = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2}.$$

З теореми 4 одержуємо два наслідки.

Наслідок 1. Якщо  $K_1$  – множина степенів з основою  $a > 1$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) і різними натуральними показниками і  $T(K_1) = k_1$ , то

$$T(2K_1) = \frac{k_1^2 + k_1}{2}, \quad \text{а} \quad R_1 = \frac{k_1^2 - k_1}{2} \quad \text{і} \quad \bar{R}_1 = k_1^2 - k_1 + 1.$$

Використавши теорему 4, одержимо множину з такими значеннями  $T_2$  і  $\bar{R}_2$ :  $T_2 = T_1 \cdot \frac{k_2^2 + k_2}{2}$ ,  $\bar{R}_2 = \bar{R}_1 \cdot (k_2^2 - k_2 + 1)$ . Застосувавши цю теорему  $(m-1)$  раз, приходимо до множини, для якої

$$T_m = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^2 + k_i}{2}, \quad \bar{R}_m = \prod_{i=1}^m (k_i^2 - k_i + 1).$$

Отже, при досить великих  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) будемо одержувати множини з як завгодно великими значеннями  $T_m$  і  $\bar{R}_m$ .

Наслідок 2. Теорема 4 дає можливість будувати такі множини, для яких  $R < T < R + T(k)$  і множини, для яких  $T < R$ .

Деякі з таких множин вказані в роботі [3, с.54]. Тут же наведені значення  $R$  і  $T$  для множин, що налічують 6, 7 та 8 елементів і дається класифікація цих множин за значеннями  $R$  і  $T$ . Відповідні множини взяті з таблиць 1, II роботи [4, с.189].

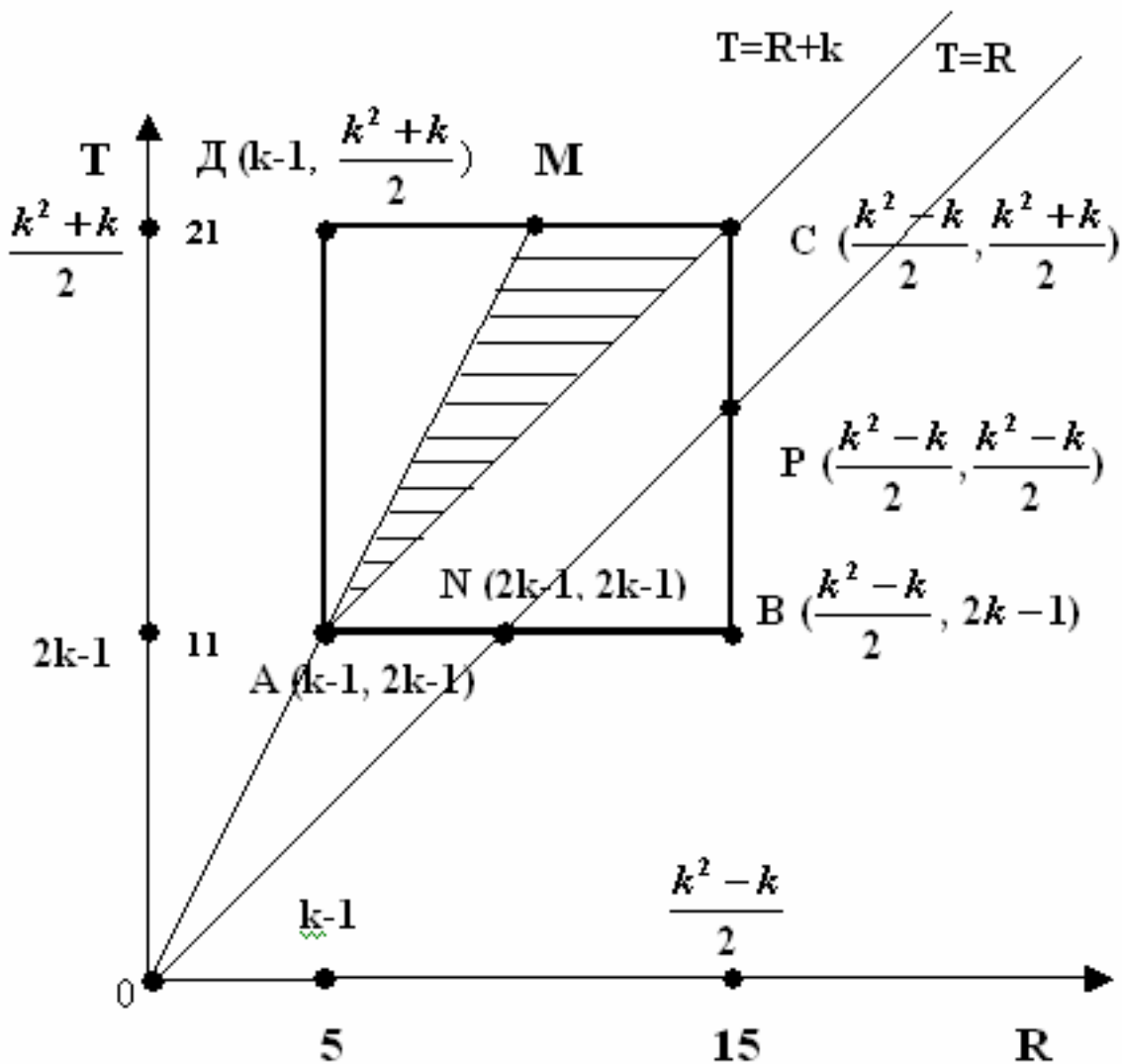
В статті [5] доведено теорему про існування множин, для яких  $\bar{P} > c \cdot T$ , де  $c$  – як завгодно велике дійсне число. Знайдено також значення  $\frac{\ln T}{\ln R}$  у вершинах критичних трикутників і, як приклад, побудовано множину, для якої  $\bar{R} \geq 100 \cdot T$ .

Цікава геометрична інтерпретація залежностей між  $R$ ,  $T$  і  $k$  дається в роботі [3, с.57]. Суть її полягає в наступному.

Відомо, що  $2 \cdot k - 1 \leq T \leq \frac{k^2 + k}{2}$ , а  $k - 1 \leq R \leq \frac{k^2 - k}{2}$  [6, с.19, с. 57].

В прямокутній системі координат  $ROT$  побудуємо квадрат  $ABCD$  ( $k$ ), координатами вершин якого є:  $A (k-1; 2 \cdot k-1)$ ,  $B \left( \frac{k^2 - k}{2}; 2 \cdot k - 1 \right)$ ,  $C \left( \frac{k^2 - k}{2}; \frac{k^2 + k}{2} \right)$ ,  $D \left( k - 1; \frac{k^2 + k}{2} \right)$ . Цей квадрат зображений на мал. 1. при значенні  $k = 6$ .

Для множини  $L_1 = \{ 0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \}$ , де  $a_k \in N(i=1, 2, \dots, k-1)$ ,  $T(L_1) = k$ ,  $T(2 \cdot L_1) = T$ . Число ж різних додатніх різниць елементів множини  $L_1$  дорівнює  $R$ . Кожній множині  $\{ 0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \}$  поставимо у відповідність точку з координатами  $(R, T)$ .



Мал. 1 /для  $k = 6$ ./

Точки з координатами  $(R, T)$  не виходять за межі квадрата  $ABCD(k)$ . Рівняння діагоналі  $(AC)$  цього квадрата має вигляд  $T = R + k$ . Пряма  $T = \bar{R} = 2 \cdot R + 1$  проходить через вершину  $A$  і перетинає сторону  $[CD]$  квадрата в точці  $M\left(\frac{k^2 + k - 2}{4}; \frac{k^2 + k}{2}\right)$ . При цьому утвориться так званий

*критичний* трикутник  $AMC(k)$ . Виявляється, що при  $k \leq 7$  точки з координатами  $(R, T)$  не виходять за межі відповідного критичного трикутника, а при  $k \geq 8$  уже знайдуться такі точки, які цій властивості не задовольняють. Зокрема, при  $k=8$  такою точкою є точка з координатами  $(12, 26)$ , що відповідає множині  $\{0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14\}$  [3, с.58, мал.2]. Переважна більшість точок, що відповідають восьмиелементним множинам, попадають в критичний трикутник  $AMC(8)$ .

Якщо побудувати бісектрису  $T=R$ , то вона перетне сторону квадрата  $ABCD(k)$  ( $k \geq 5$ ) в точках  $N(2 \cdot k - 1; 2 \cdot k - 1)$  і  $P\left(\frac{k^2 - k}{2}; \frac{k^2 - k}{2}\right)$ . При цьому утвориться трапеція  $ANPC(k)$  і трикутник  $NPB(k)$  (мал. 1). Виявляється [3, с.58], що існують множини, для яких відповідні точки попадають у внутрішню область трапеції  $ANPC(k)$ , а також множини, відповідні точки яких попадають у трикутник  $NPB(k)$  [3, с.58].

Якісна залежність між інваріантами  $R$  і  $T$  характеризується відношенням  $\ln T / \ln \bar{R}$ . Нехай  $\alpha$  – нижня границя цієї послідовності для будь-яких множин  $K$ , а  $\beta$  – верхня границя цієї послідовності.

В роботі [1, с.172] доведено, що  $\alpha \geq 3/4$ , а  $\beta \leq 4/3$ .

Зокрема, для множини  $\{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$   $T=28$ ,  $P=21$ ,  $\ln T / \ln P = \ln 28 / \ln 43 \approx 0,89$ . Виявляється, що для різних інших відомих множин  $\ln T / \ln \bar{P} > 0,89$ . Проблемою залишається відшукання таких множин, для яких  $3/4 < \ln T / \ln \bar{P} < 0,89$ , тобто множин, для яких вказане відношення попадає в інтервал  $(0,75; 0,88)$ , зокрема, наближається до  $0,75$ .

Що ж стосується  $\beta$  – верхньої границі послідовності  $\ln T / \ln \bar{P}$ , то можна вказати такий набір множин, для яких послідовність значень  $\ln T / \ln \bar{P}$  є зростаючою і наближається до  $\beta=4/3$ . Такою, зокрема, є послідовність:  $\ln 28 / \ln 27 \approx 1,011$ ;  $\ln 26 / \ln 25 \approx 1,0222$ ;  $\ln 59 / \ln 55 \approx 1,0175$ ;  $\ln 51 / \ln 47 \approx 1,0212$ ;  $\ln 67 / \ln 61 \approx 1,0228$ ;  $\ln 83 / \ln 75 \approx 1,0235$ ;  $\ln 99 / \ln 89 \approx 1,02372$ ;  $\ln 115 / \ln 103 \approx 1,02378$ . Очевидно, що кожне з даних відношень менше  $4/3$ . Проблемою є відшукання таких множин, для яких  $\ln T / \ln \bar{P} > 1,024$ , і таких, що  $(\ln T / \ln \bar{P} - 4/3)$  є як завгодно мале дійсне число.

## БІБЛІОГРАФІЯ

1. Пигарев Ю.П., Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами  $R$  и  $T$ : Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М.: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973. – С. 172–174.

2. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами  $R$  і  $T$ . //Наукові записки. – Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1997. – С. 51–55.
3. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Залежність між інваріантами  $R$  і  $T$ . // Наукові записки. – Вип. 57. Серія: Математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – С. 52–59.
4. Асафова Г.А. Об одном типе логических квадратов шестого порядка: Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973. – С. 189–190.
5. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Деякі питання структурної теорії додавання множин. //Наукові записки. – Вип. 65. Серія: Математичні науки. –Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2006. – С.67–69.
6. Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966. – 140с.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 16 січня 2006 р.*

УДК 511

## ДЕЯКІ ПИТАННЯ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН

**В.М. Євладенко, Ю.П. Пігарьов**

Доведено теорему про існування множин, для яких  $\bar{R} > C \cdot T$ , де  $C$  – як завгодно велике дійсне число, а також знайдені значення  $\frac{\ln T}{\ln R}$  у вершинах критичних трикутників.

Generalization of theorem on the existence for which  $\bar{R} > C \cdot T$ , where  $C$  – any big real number. The meanings  $\frac{\ln T}{\ln R}$  at the axis of critical triangles have been found.

Вважалось /повідомлено в 1966 р. угорським математиком П.Ердешем/, що  $T \leq 2 \cdot R + 1 = \bar{R}$ . Здавалось правдоподібним, що  $T \geq R + k$ , тобто

$$R + k \leq T \leq \bar{R}, \quad (1)$$

де  $k$  – кількість елементів скінченної множини  $K$  цілих чисел,  $T$  – число різних сум елементів цієї множини, а  $R$  – число додатніх різниць елементів множини  $K$ .

В роботі [1, с.58] ставляться задачі про залежність між інваріантами ізоморфних перетворень, зокрема між інваріантами  $T$  і  $R$ .

Виявилось, що нерівності (1) не завжди мають місце. Більше того, справедлива наступна теорема. [2, с. 172]:

нехай  $\alpha = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln T}{\ln R}$  і  $\beta = \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{\ln T}{\ln R}$ , тоді

$$\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{\ln 28}{\ln 43} < 0,89 \quad \text{і} \quad 1,017 < \frac{\ln 59}{\ln 55} \leq \beta \leq \frac{4}{3}.$$

В роботі [3, с. 51-55] побудовано такі множини, для яких як різниця  $T - \bar{R}$ , так і різниця  $R - T$  дорівнюють будь-якому наперед заданому натуральному числу  $n$ .

В роботі [4, с. 52-59] побудовано множини, для яких

$$R_n = R_1 + \bar{R}_1 \cdot \frac{n^2 - n}{2} \quad \text{і} \quad T_n = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2}, \quad \text{а також наведено}$$

приклад множини, для якої  $\frac{\ln 115}{\ln 103} \approx 1,02378$ , тобто  $1,02378 < \beta \leq \frac{4}{3}$ .

В даній статті доведено теорему про існування множин, для яких  $\bar{R} > C \cdot T$ , де  $C$  – як завгодно велике дійсне число, а також знайдено значення  $\frac{\ln T}{\ln R}$  у вершинах критичних трикутників.

Теорема. Існують множини, для яких  $\bar{R} > C \cdot T$ , де  $C$  – як завгодно велике дійсне число.

В роботі [4, с. 54] було доведено існування множин, для яких  $T_m = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^2 + k_i}{2}$ , а  $\bar{R}_m = \prod_{i=1}^m (k_i^2 - k_i + 1)$ , тоді  $\frac{T_m}{R_m} = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)}$ . (2)

Легко показати, що  $\frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)} \leq \frac{3}{4}$  при  $k_i \geq 5$ .

Дійсно,  $4 \cdot \frac{k_i^2 + k_i}{2} \leq 3(k_i^2 - k_i + 1)$ , або  $2 \cdot k_i^2 + 2 \cdot k_i \leq 3 \cdot k_i^2 - 3k_i + 3$ ,

звідки  $k_i^2 - 5k_i + 3 \geq 0$ . Одержана нерівність виконується при  $k_i \geq 5$ . Тоді з (2)

слідуює, що  $\frac{T_m}{R_m} \leq \prod_{i=1}^m \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^m$ . Очевидно, що  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{R_m} = 0$ . Звідси випливає, що

при досить великих  $m$   $\frac{T_m}{R_m} < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне дійсне

число. Отже  $\bar{R}_m > \frac{1}{\varepsilon} \cdot T_m$  або  $\bar{R}_m > C \cdot T_m$ , де  $C$  – як завгодно велике дійсне число. Теорему доведено.

Зауваження. Як відомо [4, с. 57], праві вершини критичних трикутників мають координати  $\left(\frac{k^2 - k}{2}; \frac{k^2 + k}{2}\right)$ . Звідси випливає, що для квадрата  $АВСД(k)$  маємо:

$$\bar{R} = k^2 - k + 1, \text{ а } T = \frac{k^2 + k}{2}.$$

Складемо таблицю значень  $k, \bar{R}, T, \frac{\ln T}{\ln \bar{R}}$ .

$k$	$\bar{R}$	$T$	$\frac{\ln T}{\ln \bar{R}}$	$k$	$\bar{R}$	$T$	$\frac{\ln T}{\ln \bar{R}}$
8	57	36	0,8863	25	601	325	0,9039
9	73	45		30	871	465	0,9073
10	91	55		35	1191	625	0,9089
11	111	66		40	1561	820	0,9124
12	133	78	0,8908	45	1981	1025	0,9131
13	157	91		50	2451	1275	0,9163
14	183	105		60	3541	1830	0,9192
15	211	120		70	4831	2485	0,9216
16	241	136	0,8957	80	6321	3240	0,9236
17	273	153		90	8011	4095	0,9254
18	307	171		100	9901	5050	0,9268
19	343	190		500	249501	125250	0,9445
20	381	210	0,8998	1000	999001	500500	0,9499

Як приклад, побудуємо множину, для якої  $\bar{R} \geq 100 \cdot T$ . Нехай  $K_i = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{k_i}\}$ ,  $i \in N$ . За наслідком 1 теореми 4 /див. [4, с. 54]/ маємо:

$$T(2 \cdot K_i) = \frac{k_i^2 + k_i}{2} \quad \text{і} \quad \bar{R}_i = k_i^2 - k_i + 1.$$

При  $m=16$  маємо:

$$T_{16} = \prod_{i=1}^{16} \frac{k_i^2 + k_i}{2} \quad \text{і} \quad \bar{R}_{16} = \prod_{i=1}^{16} (k_i^2 - k_i + 1), \text{ а}$$

$$\frac{T_{16}}{\bar{R}_{16}} = \prod_{i=1}^{16} \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)} \leq \prod_{i=1}^{16} \frac{3}{4}, \text{ оскільки } \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)} \leq \frac{3}{4} \text{ при } k_i \geq 5.$$

$$\text{Тоді } \frac{T_{16}}{\bar{R}_{16}} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{16} \leq \frac{1}{100}, \text{ звідки } \bar{R}_{16} \geq 100 \cdot T_{16}.$$

#### БІБЛЮГРАФІЯ

1. Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966.–140с.
2. Пигарев Ю.П. и Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами  $R$  и  $T$ : Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М.: Союзполиграфпром при ГК СССР, 1973, –с. 172–174.
3. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами  $R$  і  $T$ . //Наукові записки.–Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1977. С. 51–55.
4. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Залежність між інваріантами  $R$  і  $T$ . //Наукові записки. – Вип. 57. Серія: Математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – С. 52–59.

Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 16 січня 2006 р.

УДК 681.3.07

## К ВОПРОСУ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБРАБОТКИ ЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

**С.Т. Кузнецов, Н.В. Столярчук, Т.Ф. Шмелёва**

**Государственная летная академия Украины**

Предложен способ анализа и формализации задач решение которых традиционно считается прерогативой разумной деятельности человека. Автоматизация этой деятельности – одна из основных задач искусственного интеллекта. Весьма актуальной здесь является проблема создания информационного интерфейса человек-техническое устройство. На практике всегда нелегко поместить логическую обработку информации в «прокрустово ложе» компьютерных операций. Нагромождение информационных объектов бывает таковым, что быстродействие электроники вступает в противоречие со сложностью формулировки задач на доступном машине языке.

The way of analyses and formalization of tasks, which are traditionally considered to be solved by a human sense activity, is proposed. The problem of creating an information human-machine interface is sharply actual in this situation. Overlaying of information objects could be so that quick-operation of electronics may conflict with a complicated formulation of tasks on a language which is clear for a machine.

В данной статье рассмотрено применение алгоритма поиска решения интеллектуальных задач путем исключения противоречий. Алгоритм реализован в виде специальной компьютерной программы ViloR (виртуальный логический решатель – см. листинг 1).

На основании ограниченного, но функционально полного набора операций алгебры высказываний, как оказалось, можно простым и естественным образом подготовить информационный запрос на решение задачи, после чего компьютерная программа решение находит автоматически. В определенной степени неожиданным оказалось то, что довольно просто переборный алгоритм для решения невычислительных задач реализуется посредством применения стандартных операций, имеющих практически во всех широко используемых языках программирования.

Суть вопроса поясним на трех конкретных задачах.

Задача о расписании (взята из [1]).

Рассмотрим упрощенный учебный план, где неделя включает всего три учебных дня – понедельник, среду и пятницу, причем каждый день содержит не более трех пар учебных часов. В течении недели учащиеся должны иметь три пары учебных часов по математике, две – по физике и по одной – по химии, истории и физкультуре. При этом:

1) Математик настаивает, чтобы его часы никогда не были последними и по крайней мере два раза – первыми;

2) Физик желает, чтобы его часы также не были последними; по крайней мере один раз он хочет иметь первую пару часов; в среду он должен быть

свободен первые два часа, а в пятницу, напротив того, может работать лишь первые два часа;

3) Историк может преподавать лишь в понедельник в течение первых четырех часов или в среду в течение третьего и четвертого часов; кроме того, он не желает, чтобы его занятия непосредственно предшествовали физкультуре;

4) Химик настаивает, чтобы его занятия происходили не в пятницу и не в те дни, когда учащиеся занимаются физикой;

5) Занятия по физкультуре проводятся на стадионе, и поэтому естественно требовать, чтобы они были последними в свой день; кроме того, физкультурник в пятницу занят на другой работе;

6) Естественно требовать, чтобы в течение каждого учебного дня у учащихся было не больше двух часов занятий по одному и тому же предмету;

7) Свободные от занятий два часа в рамках учебной недели из  $3 \times 3 = 9$  пар часов (из числа которых заняты лишь  $3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8$  пар часов) должны приходиться на последнюю пару часов в пятницу или первую пару часов в понедельник.

Как можно составить расписание с соблюдением всех поставленных условий?

Решение легко находится путем простых и понятных рассуждений, если задаться целью последовательно отсеивать все невозможные варианты, оставляя возможные.

Будем рассуждать по пунктам.

1. Две первые пары заняты математикой, а одна физикой. Следовательно, свободные часы приходятся на последнюю пару в пятницу.

2. В пятницу могут работать только физик и математик, причем физика может быть только на первой паре. Для математики остается вторая.

3. Расписание на пятницу готово. Кроме того становится ясно, что на первых парах, как в понедельник, так и в среду должна быть математика.

4. Вторые пары как в понедельник, так и в среду остаются для физики и истории, так как физик так и историк не должны работать на третьих парах (физик не желает, а историк не может).

5. После истории не должна быть физкультура, а после физики не должна быть химия. Следовательно, физкультура следует за физикой, а химия за историей.

Таким образом, существуют только два способа составления расписания, удовлетворяющие всем поставленным требованиям:

1) понедельник: математика, история, химия; среда: математика, физика, физкультура; пятница: физика, математика, свободные часы;

2) понедельник: математика, физика, физкультура; среда: математика, история, химия; пятница: физика, математика, свободные часы.

Автор задачи приходит к тому же выводу путем виртуозного применения аппарата математической логики.

Вторая, рассматриваемая нами задача «Задача об утреннем купании» (взята тоже из [1]).

Предположим, что в санатории на берегу моря отдыхают отец  $O$ , мать  $M$ , сын  $C$  и две дочери  $D_1$  и  $D_2$ . До завтрака члены семьи часто купаются в море, причем известно, что если отец утром отправляется купаться, то с ним обязательно идут мать и сын; если сын идет купаться, то его сестра  $D_1$  отправляется вместе с ним; вторая дочь  $D_2$  купается тогда и только тогда, когда купается мать, и каждое утро купается по крайней мере один из родителей. Если в воскресенье утром купалась в море лишь одна из дочерей, то кто из членов семьи в это утро ходил на море?

Для нас данная задача интересна тем, что мы можем весьма просто показать, как без формального владения алгеброй логики, без умения программировать вообще и без применения ПРОЛОГ-подобного языка в частности можно компьютеру «растолковать» условие и он найдет решение.

Вот как это выглядит. Заметим, что в задаче пять величин:  $O$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $D_1$  и  $D_2$  каждая из которых может принимать одно из двух значений – «1» - купается; «0» - не купается.

Теперь внимательно прочитывая условие задачи записываем его последовательно в виде противоречий.

1.  $\overline{OM}$  - не может быть, чтобы отец купался, а мать – нет. 2.  $\overline{OC}$  - не может быть, чтобы отец купался, а сын – нет. Далее: 3.  $\overline{CD_1}$ ; 4.  $\overline{MD_2}$ ; 5.  $\overline{MD_2}$ ; 6.  $\overline{OM}$ ; 7.  $\overline{D_1D_2}$ ; 8.  $\overline{D_1D_2}$ .

Порядок записи условий не имеет значения. Однако для ввода в компьютер данных нужно произвести еще две весьма несложные операции:

1. Задать порядок следования величины при помощи двоичных весовых коэффициентов:  $O - 1$ ,  $M - 2$ ,  $C - 4$ ,  $D_1 - 8$ ,  $D_2 - 16$ .

2. Представить противоречие в арифметической форме:

1. - 1,2; 2. - 1,4; 3. - 4,8; 4. - 2,16; 5. - 16,2; 6. - 0,3; 7. - 0,24; 8. - 24,0.

Таким образом, каждое противоречие имеет довольно простой формат – пара целых неотрицательных чисел, разделенных запятой. До запятой сумма двоичных «весов» для «единиц»; после – «для нулей». Если что-то отсутствует – пишем «0». После введения данных в компьютер получаем единственное решение:

$$1 - 0 1 0 0 1$$

То есть в воскресное утро купались мать и вторая дочь.

Могли бы мы эту задачу решить так же как и первую? Автор задачи И.М.Яглом [1] отмечает, что решение можно заменить «... «неформальными рассуждениями» (т.е. рассуждениями, опирающимися не на строго сформулированные законы логики, а на «здравый смысл») такого рода: «Если бы отец в воскресенье утром пошел купаться, то с ним пошли бы мать

и сын; но вместе с сыном пошла бы и первая дочь, а вместе с матерью – вторая дочь; а так как в воскресенье из двух дочерей на море была лишь одна, то отец не мог пойти купаться» и т.д. Но нетрудно понять, что рассуждения такого рода на самом деле также опираются на строгие законы алгебры высказываний и пресловутый «здравый смысл» как раз и заключается в точном следовании этим законам».

Тут мы сделаем довольно сильное, возможно спорное утверждение: *в нашем случае для получения решения задачи нам практически не понадобилось рассуждать*. На самом деле компьютер отсеял все противоречивые варианты, подобно тому, как решето Эратосфена отсеивает все составные числа.

И наконец, приведем задачу из [2]. Вернее самую интересную её часть. Речь идет о назначении на четыре вида работ четырех из восьми кандидатов по критерию минимальных затрат (или максимальной выгоды). Это задача о назначении – широко известная задача целочисленного линейного программирования.

Задача становится более трудной, а её математическая модель перестает быть в чисто виде линейной, если ввести дополнительные ограничения по совместимости работников, учитывая, например, их пожелания.

Пусть в нашей задаче *A* согласен работать с кем угодно. *B* не будет работать, если не будет *C*. *C* не хочет работать с *E*. *E* согласен работать с кем угодно. *D* не будет работать без *H*. *F* не будет без *G* работать с *D*, а без *D* не будет работать с *C*. *G* не будет работать, если будут *B* и *C* оба, а кроме того, он не желает работать ни с *A* ни с *E*. Чтобы *H* дал согласие работать, надо взять либо *B*, либо *F*. Кроме того *H* не будет работать с *C*, если не будет *G* и не желает работать ни с *A* ни с *E*. Считается, что хотя работники и будут работать на различных работах, они составляют один слаженный коллектив и, в первую очередь, должны неукоснительно соблюдаться требования совместимости.

Становится понятным, что прежде всего нужно отобрать все бесконфликтные четверки, потом для каждой такой четверки найти лучшее решение, решая каждый раз классическую задачу о назначениях. После этого из всех решений можно будет выбрать оптимальное по критерию максимума-минимума баллов.

Запись противоречий не содержит принципиальных трудностей. После ввода в компьютер противоречий и сообщения численности коллектива (четыре человека) получаем единственное решение:

$$1 - 0 0 0 1 0 1 1 1$$

Таким образом, единственно подходящая четверка

D, F, G и H

\* \* \*

В настоящей статье мы стремились показать, что «виртуальный логический решатель» способен на гораздо большее, чем, например, «логическое пианино» У.С.Джевенса (1835-1882) и ему подобные устройства, включая их компьютерные эмуляторы. Это с одной стороны. С другой стороны, мы надеемся, что простота и естественность ввода данных вызовет больший интерес, чем специальные (например, ПРОЛОГ-подобные) языки программирования. Большим преимуществом на наш взгляд является то, что умение программировать, здесь, не требуется. Это мы говорим потому, что существует много специальных программ, каждая из которых решает конкретную логическую задачу. В нашем же случае речь идет о целом классе задач решаемых по единому алгоритму при помощи одной специальной программы.

Листинг 1 – Программа ViLoR (Виртуальный логический решатель).  
Язык программирования - GW Basic.

```
5   REM VILOR      avtor Kuznetsov
10  DIM T1(200), T0(200), T(14)
20  FOR I=0 TO 14:T(I)=2^I:NEXT I
30  CLS:K=0:FOR I=0 TO 200:T1(I)=0:T0(I)=0:NEXT I: INPUT "LOGPEREM";L
40  IF L<2 OR L>15 OR L<>INT(L) THEN 30ELSE N=2^L-1
50  FOR I=1 TO L:PRINT I;"-";T(I-1):NEXT I
60  PRINT "LOGPROTIVORECHIJA."
70  M=0
80  M=M+1
90  PRINT M;"+";
100 INPUT T1 (M), T0 (M)
110 IF T1 (M)>0 OR T0 (M)>0 THEN 80 ELSE M=M-1
120 F=0
130 INPUT "UPRAVLENIE (69-OBYCHNO/N-AKTPEREM/25-REDACT/33-
PROSMOTR)";U
140 IF U>L AND U<>69 AND U<>25 AND U<>77 AND U<>777 AND
U<>33 THEN 130
150 IF U=77 THEN 30 ELSE IF U=777THEN 420
160 IF U<>25THEN 210
170 INPUT "NIZ, IZ1, IZ0";NIZ, IZ1, IZ0: IF NIZ> M THEN M=NIZ
180 IF NIZ=0 AND IZ1=0 AND IZ0=0 THEN 130
190 IF (NIZ>0 AND IZ1=0 AND IZ0=0) OR (NIZ=0 AND (IZ1>0 OR
IZ0>0)) THEN PRINT "VNIMANIE!": GOTO 170
200 T1 (NIZ)= IZ1 : T0 (NIZ)= IZ0 : GOTO 170
```

```
210 IF U <> 33 THEN 230
220 INPUT "FLAG (0/1/2)= "; F: IF F <> 0 AND F <> 1 AND F <> 2 THEN 220
    ELSE 130
230 FOR I=0 TO N
240 IF I=0 THEN A=0: ED=0: GOTO 280
250 T=((I XOR (I-1))+1)/2
260 B=A XOR T; IF B > A THEN ED+1 ELSE ED=ED-1
270 A=B
280 IF U <> 69 AND ED <> U THEN 400
290 FL=0
300 FOR P=1 TO M
310 IF (A XOR T1(P))+T1(P) <> A OR (A XOR T0(P))-T0(P) <> A THEN
    330
320 FL=P: P=M
330 NEXT P
340 IF FL > 0 AND F <> 2 THEN 400 ELSE K=K+1: PRINT K; "-";
350 FOR J=0 TO L-1
360 Q=A XOR T(J): IF Q < A THEN PRINT 1; ELSE PRINT 0;
370 NEXT J: IF F <> 2 THEN PRINT " ED="; ELSE PRINT " (;FL;)"
380 IF F=0 THEN 400
390 R=INKEYS: IF R=" " THEN 390
400 NEXT I: IF K=0 THEN PRINT "PUSTO!!!"
410 BEEP: K=0: GOTO 130
420 PRINT "K O N E C !": END
Ok
```

### БИБЛІОГРАФІЯ

1. Яглом И. М.. Алгебры Буля. В кн. О некоторых вопросах современной математики и кибернетики. Из-во «Просвещение». Москва. 1965г.
2. Бондарь О.П., Кузнецов С.Т., Столярчук Н.В.. Задача о назначениях, критерии совместимости работников и справедливости назначений. В научно-теретическом журнале «Искусственный интеллект». 4' 2005.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 14 березня 2006 р.*

УДК 532.59

## ВИЗНАЧЕННЯ ВИГЛЯДУ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ЕКОНОМІЧНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ ШЛЯХОМ

**В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, В.В. Кравченко**

Створена технологія визначення функціональної залежності між економічними показниками на основі експериментальних даних за допомогою комп'ютерного експерименту з використанням EXCEL-технології на основі математичної моделі лінійної оптимізації, що допомагає вибрати оптимальний план розвитку підприємства, бізнес-плану, інженерного проекту.

There has been the functional dependence established between the economic indices on the basis of experimental data processed with the help of computer experiment using EXCEL technology taken as grounds of mathematic model of linear optimum which helps to chose the most appropriate plan for the organization development, business plan or engineering project.

В економіці підприємств, управлінні різними проектами, при створенні різних бізнес-проектів, проектуванні складних інженерних пристроїв і машин виникає необхідність максимальної користі певного показника  $Y$  (процент зростання якості чи розвитку, прибутку, надійності, стійкості та ін.) при мінімальних затратах ресурсів  $C$  (коштів, людських ресурсів, матеріалів, часу і т.д.). У теоретичному плані така задача приводить до побудови **MINMAX** математичної моделі [3; 6] (як правило нелінійної) з наступним відшукуванням сідлоподібної точки (теорема Куна-Таккера [3; 6]). Однак на практиці як побудова математичної моделі, так і алгоритму відшукування сідлоподібної точки пов'язані зі значними труднощами, зокрема, сідлоподібна точка може не входити у допустимі значення параметрів. Тоді виникає проблема побудови виду функції, яка зв'язувала б два конкуруючі (**MAX** і **MIN**) показники  $Y$  і  $C$ . Окрім того ресурс  $C$  потрібно оптимально розподілити за певними правилами (і відповідними математичними моделями) між економічними, інженерними чи іншої природи показниками (параметрами)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Збільшуючи значення параметрів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , збільшується і значення цільової функції  $Y$ . Однак водночас зростають і затрати  $C$ . Відомо, що при зростанні показника  $x_i$  на одну одиницю потрібно понести  $p_i$  одиниць затрат відповідного ресурсу. У багатьох задачах інженерного і економічного характеру постановка даної задачі набуває такого конкретного вигляду. Значення  $Y$  і  $C$  визначаються як лінійні функції від приросту змінних  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , від яких знаходиться експертним шляхом, зокрема,  $Y$  може визначатися на основі табличних числових даних як функція лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів [1; 4; 5] і STATGRAFICS-технології [2], а вигляд функції  $C$  визначається значеннями приросту змінних  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  і затратними вартостями  $p_1, p_2, \dots, p_n$  на збільшення значення відповідної змінної на одну одиницю:

$$Y = q_1 * \Delta x_1 + q_2 * \Delta x_2 + \dots + q_n * \Delta x_n, \quad (1)$$

$$C = p_1 * \Delta x_1 + p_2 * \Delta x_2 + \dots + p_n * \Delta x_n, \quad (2)$$

при обмеженнях

$$0 \leq \Delta x_1 \leq b_1 \quad 0 \leq \Delta x_2 \leq b_2, \quad (3)$$

.....

$$0 \leq \Delta x_n \leq b_n.$$

Якби не було б обмежень на затрати  $C$ , то математичною моделлю була б задача: знайти

$$\text{MAX}_Y \quad (4)$$

при обмеженнях (3). Однак, завжди існують обмеження на затрати  $C$ . Тоді з'явиться ще одне обмеження у вигляді (2). Отже (4), (3) і (2) є математичною моделлю оптимізації функції  $Y$  (1) при обмеженнях (3) і (2). Побудована модель (4), (3), (2) експериментально за допомогою інформаційної EXCEL-технології [4; 6] (чи іншої технології, що дозволяє розв'язувати задачу лінійного програмування) дозволяє побудувати у програмованому режимі функціональну залежність між можливими затратами  $C$  і корисністю  $Y$  у табличному вигляді. Оскільки функція  $Y$  лінійна, то функціональне залежність

$$Y = F(C) \quad (5)$$

отримується як точний аналітичний вираз. Продемонструємо це прикладом.

Експериментально отримано вираз функції  $Y$  (приріст якості праці на виробництві об'єднання "Червона Зірка") за методом найменших квадратів як лінійну функцію регресії [2]:

$$Y = 0,125584 * \Delta x_1 + 2,49054 * \Delta x_2 - 1,44896 * \Delta x_3 - 4,02061 * \Delta x_4 + 0,57212 * \Delta x_5 + 0,391112 * \Delta x_6, \quad (6)$$

де  $x_1$  – організація робочого місця,  $x_2$  – санітарно-гігієнічні умови,  $x_3$  – складність праці,  $x_4$  – монотонність праці,  $x_5$  – матеріальні стимули,  $x_6$  – технічно-обґрунтовані норми, причому

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta x_1 \leq 30 \\ 0 &\leq \Delta x_2 \leq 2 \\ -2 &\leq \Delta x_3 \leq 0 \\ -2 &\leq \Delta x_4 \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 \leq \Delta x_1 \leq 15$$

$$0 \leq \Delta x_1 \leq 20,$$

$$\text{та } 12 * \Delta x_1 + 1,6 * \Delta x_2 - 69 * \Delta x_3 - 150 * \Delta x_4 + 6,5 * \Delta x_5 + 8400 * \Delta x_6 = C. \quad (8)$$

Змінюючи значення  $C$  і розв'язуючи при кожному значенні  $C$  задачу лінійного програмування, (знайти  $\text{MAX}_Y$  функції (6) при обмеженнях (7) і (8)), ми знаходимо функціональну залежність між затратами  $C$  і значенням функції корисності  $Y$  з одночасним оптимальним розподілом затрат, що і показано у наступній таблиці 2 (взято із EXCEL) [4; 6]. У таблиці 1 відображена математична модель у Excel-технології.

Таблиця 1.

імя	змінні						Вид
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
значення	0,941667		2	-2	-2	15	0
НГ		0	0	-2	-2	0	0
ВГ		30	2	0	0	15	20
Коеф. ЦФ	0,125584	2,49054	-1,44896	-4,02061	0,57212	0,391112	24,62028
Обмеження							
вартість	12	1,6	-69	-150	6,5	8400	550 Равно 550

Із таблиці 1 видно, що при затратах у 550 гривень на одного робітника отримується приріст корисності в 24,62028 одиниць. У програмованому режимі в EXCEL отримали таку таблицю 2, що виражає залежність значень цільової функції  $Y$  від затрат  $C$  :

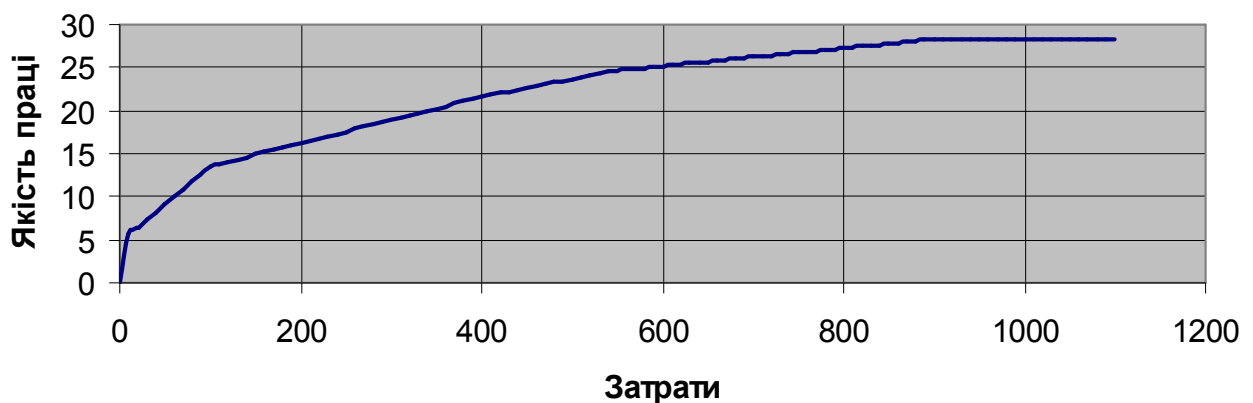
Таблиця 2.

затрати	якість	pr.	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Y
0	0		0	0	0	0	0	0	66,04152
10	5,579606		0	2	0	0	1,046154	0	71,621126
20	6,45979		0	2	0	0	2,584615	0	72,50131
30	7,339975		0	2	0	0	4,123077	0	73,381495
40	8,220159		0	2	0	0	5,661538	0	74,261679
50	9,100344		0	2	0	0	7,2	0	75,141864
60	9,980529		0	2	0	0	8,738462	0	76,022049
70	10,86071		0	2	0	0	10,27692	0	76,90223
80	11,7409		0	2	0	0	11,81538	0	77,78242
90	12,62108		0	2	0	0	13,35385	0	78,6626
100	13,50127		0	2	0	0	14,89231	0	79,54279
110	13,81216		0	2	0	-0,062	15	0	79,85368
120	14,0802		0	2	0	-0,1286667	15	0	80,12172
130	14,34828		0	2	0	-0,1953333	15	0	80,3898
140	14,616228		0	2	0	-0,262	15	0	80,657748
150	14,88432		0	2	0	-0,3286667	15	0	80,92584
160	15,15236		0	2	0	-0,3953333	15	0	81,19388
170	15,4204		0	2	0	-0,462	15	0	81,46192
180	15,68044		0	2	0	-0,5286667	15	0	81,72196
190	15,95648		0	2	0	-0,5953333	15	0	81,998
200	16,22452		0	2	0	-0,662	15	0	82,26604
210	16,49256		0	2	0	-0,7286667	15	0	82,53408
220	16,76061		0	2	0	-0,7953333	15	0	82,80213
230	17,02865		0	2	0	-0,862	15	0	83,07017
240	17,29669		0	2	0	-0,9286667	15	0	83,33821
250	17,56473		0	2	0	-0,9953333	15	0	83,60625
260	17,83277		0	2	0	-1,062	15	0	83,87429
270	18,10081		0	2	0	-1,1286667	15	0	84,14233
280	18,36885		0	2	0	-1,1953333	15	0	84,41037
290	18,63689		0	2	0	-1,262	15	0	84,67841
300	18,90493		0	2	0	-1,3286667	15	0	84,94645
310	19,17297		0	2	0	-1,3953333	15	0	85,21449
320	19,44101		0	2	0	-1,462	15	0	85,48253
330	19,70905		0	2	0	-1,5286667	15	0	85,75057
340	19,977093		0	2	0	-1,5286667	15	0	86,018613

350	20,24513	0	2	0	-1,5953333	15	0	86,28665
360	20,51313	0	2	0	-1,7286667	15	0	86,55465
370	20,78122	0	2	0	-1,7953333	15	0	86,82274
380	21,04926	0	2	0	-1,862	15	0	87,09078
390	21,3173	0	2	0	-1,862	15	0	87,35882
400	21,58534	0	2	0	-1,9953333	15	0	87,62686
410	21,79939	0	2	-0,1347826	-2	15	0	87,84091
420	22,00939	0	2	-0,2797101	-2	15	0	88,05091
430	22,21938	0	2	-0,4246377	-2	15	0	88,2609
440	22,42938	0	2	-0,5695652	-2	15	0	88,4709
450	22,63937	0	2	-0,7144928	-2	15	0	88,68089
460	22,84937	0	2	-0,8594203	-2	15	0	88,89089
470	23,05936	0	2	-1,0043478	-2	15	0	89,10088
480	23,26935	0	2	-1,1492754	-2	15	0	89,31087
490	23,47935	0	2	-1,2942029	-2	15	0	89,52087
500	23,68934	0	2	-1,4391304	-2	15	0	89,73086
510	23,89934	0	2	-1,584058	-2	15	0	89,94086
520	24,10933	0	2	-1,7289855	-2	15	0	90,15085
530	24,31933	0	2	-1,873913	-2	15	0	90,36085
540	24,51562	0,108333	2	-2	-2	15	0	90,55714
550	24,62028	0,941667	2	-2	-2	15	0	90,6618
560	24,7293	1,775	2	-2	-2	15	0	90,77082
570	24,82958	2,608333	2	-2	-2	15	0	90,8711
580	24,9324	3,441667	2	-2	-2	15	0	90,97392
590	25,03889	4,275	2	-2	-2	15	0	91,08041
600	25,14354	5,108333	2	-2	-2	15	0	91,18506
610	25,2482	5,941667	2	-2	-2	15	0	91,28972
620	25,35285	6,775	2	-2	-2	15	0	91,39437
630	25,4575	7,608333	2	-2	-2	15	0	91,49902
640	25,56216	8,441667	2	-2	-2	15	0	91,60368
650	25,66681	9,275	2	-2	-2	15	0	91,70833
660	25,77146	10,10833	2	-2	-2	15	0	91,81298
670	25,87612	10,94167	2	-2	-2	15	0	91,91764
680	25,98077	11,775	2	-2	-2	15	0	92,02229
690	26,08542	12,60833	2	-2	-2	15	0	92,12694
700	26,19008	13,44167	2	-2	-2	15	0	92,2316
710	26,29473	14,275	2	-2	-2	15	0	92,33625
720	26,39938	15,10833	2	-2	-2	15	0	92,4409
730	26,50404	15,94167	2	-2	-2	15	0	92,54556
740	26,60869	16,775	2	-2	-2	15	0	92,65021
750	26,71334	17,60833	2	-2	-2	15	0	92,75486
760	26,818	18,44167	2	-2	-2	15	0	92,85952
770	26,92265	19,275	2	-2	-2	15	0	92,96417
780	27,0273	20,10833	2	-2	-2	15	0	93,06882
790	27,13196	20,94167	2	-2	-2	15	0	93,17348
800	27,23661	21,775	2	-2	-2	15	0	93,27813
810	27,34126	22,60833	2	-2	-2	15	0	93,38278
820	27,44592	23,44167	2	-2	-2	15	0	93,48744
830	27,55057	24,275	2	-2	-2	15	0	93,59209
840	27,65522	25,10833	2	-2	-2	15	0	93,69674
850	27,75988	25,94167	2	-2	-2	15	0	93,8014
860	27,8653	26,775	2	-2	-2	15	0	93,90682
870	27,96918	27,60833	2	-2	-2	15	0	94,0107
880	28,07384	28,44167	2	-2	-2	15	0	94,11536
890	28,17849	29,275	2	-2	-2	15	0	94,22001
900	28,2696	30	2	-2	-2	15	0,000155	94,31112

910	28,27007	30	2	-2	-2	15 0,001345	94,31159
920	28,27053	30	2	-2	-2	15 0,002536	94,31205
930	28,271	30	2	-2	-2	15 0,003726	94,31252
940	28,27146	30	2	-2	-2	15 0,004917	94,31298
950	28,27193	30	2	-2	-2	15 0,006107	94,31345
960	28,27239	30	2	-2	-2	15 0,007298	94,31391
970	28,27286	30	2	-2	-2	15 0,008488	94,31438
980	28,27333	30	2	-2	-2	15 0,009679	94,31485
990	28,27379	30	2	-2	-2	15 0,010869	94,31531
1000	28,27426	30	2	-2	-2	15 0,01206	94,31578
1010	28,27472	30	2	-2	-2	15 0,01325	94,31624
1020	28,27519	30	2	-2	-2	15 0,01444	94,31671
1030	28,27565	30	2	-2	-2	15 0,015631	94,31717
1040	28,27612	30	2	-2	-2	15 0,016821	94,31764
1050	28,27658	30	2	-2	-2	15 0,018012	94,3181
1060	28,27705	30	2	-2	-2	15 0,019202	94,31857
1070	28,27752	30	2	-2	-2	15 0,020393	94,31904
1080	28,27798	30	2	-2	-2	15 0,021583	94,3195
1090	28,27845	30	2	-2	-2	15 0,022774	94,31997
1100	28,27891	30	2	-2	-2	15 0,023964	94,32043
2000	28,3208	30	2	-2	-2	15 0,131107	
3000	28,36738	30	2	-2	-2	15 0,250155	
20000	29,15891	30	2	-2	-2	15 2,273964	
30000	29,62452	30	2	-2	-2	15 3,46444	

З таблиці 2 видно динаміку змін оптимального розподілу затрат  $C$  та залежність якості праці  $Y$  від затрат  $C$ . Оптимізація задачі лінійного програмування (11), (12), (13) відбувається тільки у послідовному використанні змінних  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , що впливає із таблиці 2. Можна у середовищі EXCEL побудувати графік функції  $Y=F(C)$  за точками таблиці 2:



**Малюнок 1.**

Будуємо графік у вигляді ламаної лінії. Між точками переходу будуть відрізки прямих. Знайдемо аналітичний вираз рівнянь прямих, яким належать ланки ламаної. Рівняння знаходимо за двома точками. Для цього складемо допоміжну таблицю 3:

Таблиця 3.

с	різниця	У	різн. У	різн. С
0	0	66,04152	13,54528	100,5
100,5	13,54528	79,5868	8,07352	300,7
401,2	21,6188	87,66032	2,87902	137,3
538,5	24,49782	90,53934	3,76963	360
898,5	28,26745	94,30897	0,01146	201,5
1100	28,27891	94,32043		

Користуючись таблицею 3, після певних розрахунків одержуємо рівняння ланок ламаної як рівняння прямих за двома точками:

- 1) Перша ланка:  $Y=0,134781 \cdot C, C \in [0; 100,5]$ .
- 2) Друга ланка:  $Y=0,026867 \cdot C + 10,84267, C \in [100,5; 401,2]$ .
- 3) Третя ланка:  $Y= 0,02105 \cdot C + 13,19982, C \in [401,2; 538,5]$ .
- 4) Четверта ланка:  $Y=0,0104715 \cdot C + 18,85908, C \in [538,5; 898,5]$ .
- 5) П'ята ланка:  $Y= 0,0000073 \cdot C+27,75568, C \in [898,5; 1100]$ .

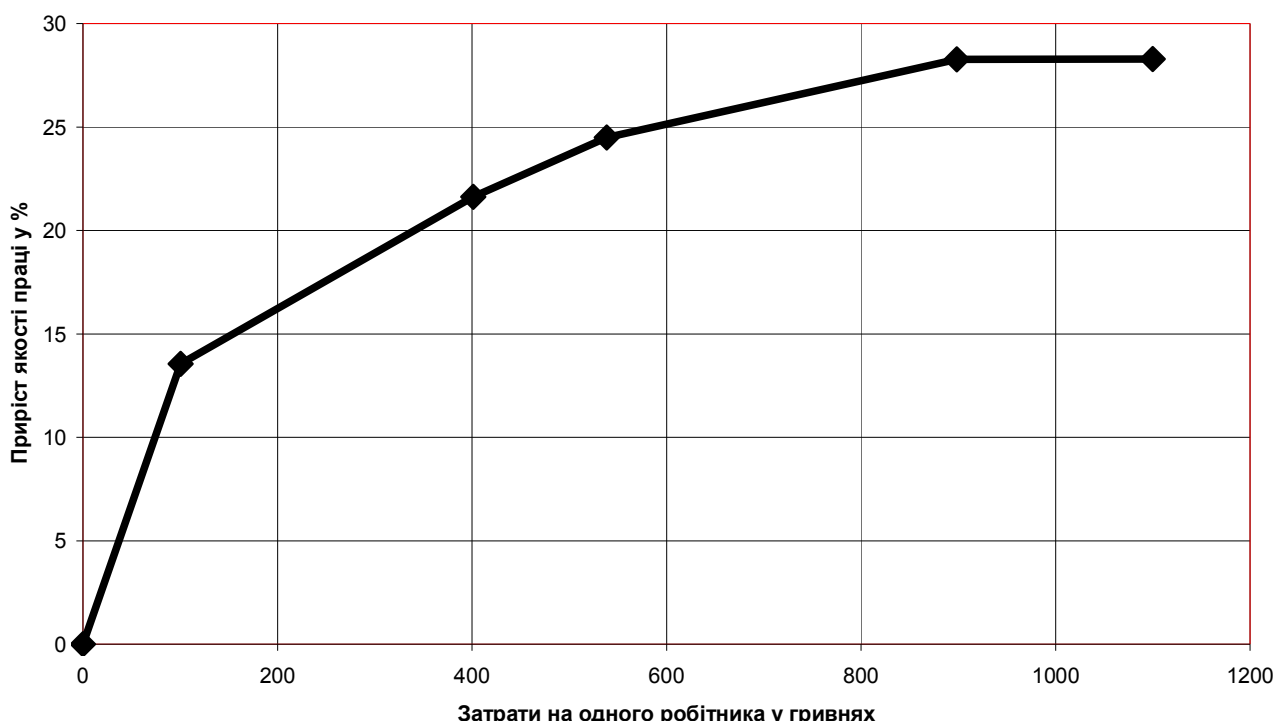
Отримуємо графік функції

$$Y=F(C)$$

у вигляді ламаної лінії, що дозволяє наочно спостерігати функціональну залежність між затратами  $C$  і зростанням якості праці  $Y$ . Отримана ламана вгнута, що відображає загальну тенденцію розвитку природних, економічних, соціальних процесів, а саме: зі збільшенням затрат  $C$  корисність  $Y$  не зростає у прямій пропорції, а зростання уповільнюється і, як видно із графіку (малюнок 2), на певному етапі майже припиняється.

Малюнок 2.

Залежність між затратами на зростання якості праці і відповідним зростанням якості праці у %



Наведена математична модель і технологія експериментального дослідження процесу розвитку за допомогою інформаційно-комп'ютерних технологій дозволяє вибрати оптимальний план розвитку підприємства, бізнес-план, інженерний проект, тощо.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Берк К., Кэйри П. Анализ данных с помощью Microsoft Excel.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 560 с.
2. Дюк В.А. Обработка данных в ПК в примерах и задачах. – Санкт-Петербург: Питер, 1997. – 240 с.
3. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2—5. – 608 с.
4. Мур Д., Уэдерфорд Л.Р. Экономическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд.: Перевод с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
5. Справочник по математике для экономистов / В.Е.Барбаумов, В.И.Ермаков, Н.Н.Кривенцова и др. ; Под ред. В.И.Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.
6. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 7-е издание, : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 4 березня 2006 р.*

УДК517

## ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЄНСЕНА МЕТОДОМ ШТУРМА

**О.П. Макарчук**

Доводиться нерівність Єнсена методом Штурма.

The inequality of Ensen are proved by methods of Shturm.

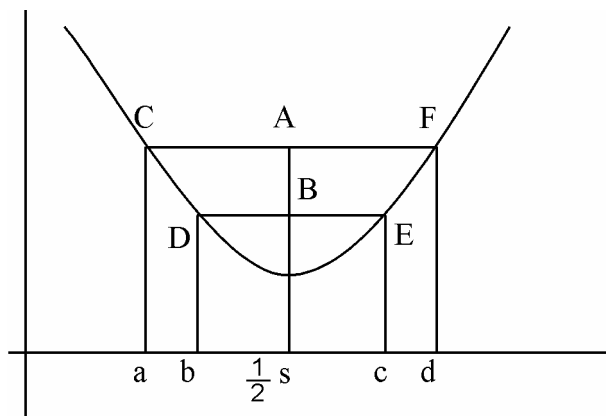
Для опуклої вниз функції  $f(x)$  і дійсних чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  доведемо нерівність Єнсена:

$$1/n(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n))\geq f(1/n(x_1+x_2+\dots+x_n)) \quad (1)$$

Спочатку доведемо лему:

Лема. Для чисел  $a \leq b \leq c \leq d$ , що задовольняють рівність:  $a+d=b+c=S$ , виконується нерівність:  $f(a)+f(d) \geq f(b)+f(c)$ .

Доведення. Фактично це означає, що при зближенні чисел  $x$  і  $y$  при їх сталій сумі вираз  $f(x)+f(y)$  не збільшується. Ця нерівність має досить наглядне геометричне ілюстрування.



На малюнку зображені точки  $C(a, f(a))$ ,  $D(b, f(b))$ ,  $E(c, f(c))$ ,  $F(d, f(d))$  і середини  $A$  та  $B$  відрізків  $CF$  і  $DE$  відповідно. Точка не виходить за межі “чаші”  $CDEF$ , тому ордината точки  $A$  не менша за ординату точки  $B$ , тобто  $\frac{1}{2}(f(a)+f(d)) \geq \frac{1}{2}(f(b)+f(c))$ , або  $f(a)+f(d) \geq f(b)+f(c)$ , що і потрібно було довести.

Однак звісно для більшої чіткості потрібні алгебраїчні міркування, які ґрунтуються на означенні опуклості.

Зрозуміло, що знайдеться  $\lambda \in [0, 1]$  таке, що  $b = \lambda a + (1-\lambda)d$ , тоді  $c = a + d - b = a + d - \lambda a - (1-\lambda)d = (1-\lambda)a + \lambda d$ . Враховуючи опуклість функції  $f(x)$ , маємо:  $f(b) + f(c) = f(\lambda a + (1-\lambda)d) + f((1-\lambda)a + \lambda d) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(d) + (1-\lambda)f(a) + \lambda f(d) = f(a) + f(d)$ .

Тепер перейдемо до безпосереднього доведення нерівності (1). Позначимо середнє арифметичне чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  через  $A$ . Якщо не всі дані числа рівні між собою, то найменше з них менше  $A$ , а найбільш - більше  $A$ . Нехай, скажімо,  $x_1 < A$ ,  $x_2 > A$ . Замінивши  $x_1$  на  $A$ , а  $x_2$  на  $x_1 + x_2 - A$ , ми зберігши суму цих чисел зблизимо їх. При чому середнє арифметичне  $A$  не зміниться, а ліва частина нерівності (1) за лемою не збільшиться. Якщо в новому наборі чисел є нерівні, то виконуємо ту саму операцію. Так як на кожному кроці збільшується кількість чисел, рівних  $A$ , через скінченне число кроків всі числа стануть рівними і ми прийдемо до набору, для якого ліва і права

частина нерівності (1) рівні. Так як при цьому на кожному кроці ліва частина нерівності не зростала, а права залишилась незмінною, то нерівність (1) правильна.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Наука, 1965. – 342 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Наука, 1965. – 347 с.
3. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967. – 252 с.
4. Болтянский В. Г. Ялгом И. М. Геометрические задачи на максимум и минимум. – В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. V. – М.: Наука, 1966. – 421 с.
5. Вортянський П. Е. Методи мінімізації функцій. // У світі математики. Том 5, вип.. 3, 1983. – с. 22–27

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 20 березня 2006 р.*

УДК 519.1

## ПРО ІСНУВАННЯ КУБІЧНИХ РОЗКЛАДІВ ГРАФУ $K_{10}$ ТИПУ 2011

**Л.П. Петренюк, А.Я.Петренюк**

Проведено класифікацію кубічних розкладів графу  $K_{10}$  на порядкові та компонентні типи. У випадку порядкового типу 2011 розв'язано задачу існування: для кожного компонентного типу встановлено, порожній він чи ні.

The family of cubic decompositions of  $K_{10}$  is divided into order and component types. In the case of order type 2011 for each component type the question, is it empty or not, is decided.

Під *кубічним розкладом* графу  $K_n$  розуміють сімейство кубічних підграфів графу  $K_n$ , таке, що кожне ребро графу  $K_n$  належить одному і тільки одному з цих підграфів. Згадані підграфи називаються *компонентами* розкладу, порядок  $n$  основного графу називається *порядком розкладу*. *Розміром розкладу* називають кількість компонент у ньому.

**1. Результати попередників.** Вивчення розкладів повних графів на регулярні підграфи започатковане досить давно. Кіркман [1] у 1847 році розв'язав задачу про існування систем трійок, які пізніше одержали назву штейнерових і являють собою не що інше, як розклади повних графів на трикутники -регулярні підграфи степеня 2. З початку 20 століття вивчаються так звані 1-факторизації [2] – розклади повних графів на регулярні фактори степеня 1. Серед класичних комбінаторних конфігурацій – штейнерові системи четвірок [3], які можна трактувати як кубічні розклади повних графів на компоненти, ізоморфні графові  $K_4$ .

Вивчення кубічних розкладів у загальному вигляді розпочато порівняно недавно. Встановлено необхідну умову

$$n \equiv 1 \pmod{3}$$

існування кубічних розкладів графу  $K_n$ .

*Типом* кубічного розкладу  $R$  називається вектор  $a(R) =$

$(a_4, a_6, \dots, a_{2k}, \dots)$ , де  $a_s$  – кількість компонент у розкладі  $R$ , які мають порядок  $s$ . Тип слугує інваріантом у множині кубічних розкладів порядку  $n$  і розбиває цю множину на підмножини, кожна з яких вміщує всі розклади певного типу; ці підмножини ми теж називаємо типами.

Задача полягає в тому, щоб для кожного можливого типу встановити, 1) існують чи ні кубічні розклади цього типу (задача існування) та 2) скільки, з точністю до ізоморфізму, існує кубічних розкладів цього типу.

В [4] встановлено, що існують 14 можливих типів кубічних розкладів графу  $K_{10}$ , а саме

1.0003   2.0130   3.0211   4.0500   5.1021  
6.1102   7.1310   8.2120   9.2201   10.3011

11.3300 12.4110 13.5001 14.6100.

В [5] показано, що кожен з цих типів, за винятком типу 6100, не порожній. Розклади типу 6100 не існують.

Статті [6,7] містять повний перелік кубічних розкладів типу 0003 – так званих *кубічних факторизацій* графу  $K_{10}$ . У статті [8] перелічено розклади типу 0500, де компонентами служать кубічні графи порядку 6.

**2. Поглиблена задача існування.** У даній статті розглядається поглиблена задача існування кубічних розкладів типу 0211. Поряд з введеними раніше типами розкладів (назвемо їх *порядковими* типами) введемо *компонентні типи*. Компонентний тип (для порядкового типу 0211) задається, якщо зафіксувати, з точністю до ізоморфізму, кубічний граф  $G$  порядку 10, кубічний граф  $X$  порядку 6 та два кубічні графи  $x, y$  порядку 6. Кубічний розклад типу 0211 має компонентний тип  $(G, X; x, y)$ , якщо його старша компонента ізоморфна графові  $G$ , компонента порядку 8 – графові  $X$ , а найменші компоненти ізоморфні одна – графові  $x$ , а друга – графові  $y$ . Аналогічно вводяться компонентні типи для довільного порядкового типу.

Поглиблена задача існування формулюється таким чином: для кожного компонентного типу з'ясувати, існують чи ні кубічні розклади цього типу?

Ми позначаємо кубічні графи порядку 10 символами  $G_1, G_2, \dots, G_{19}, G_{20}, G_{21}$ , де  $G_k (k=1, \dots, 19)$  означає граф з номером  $k$  з переліку неізоморфних зв'язних кубічних графів [9]; Кожен граф  $G_k (k=1, \dots, 21)$  зображений у заголовках частин списку з пункту 4 множиною своїх ребер. Позначення 6 кубічних графів порядку 8 та 2 кубічних графів порядку 6 зрозумілі з поданого нижче рисунка.

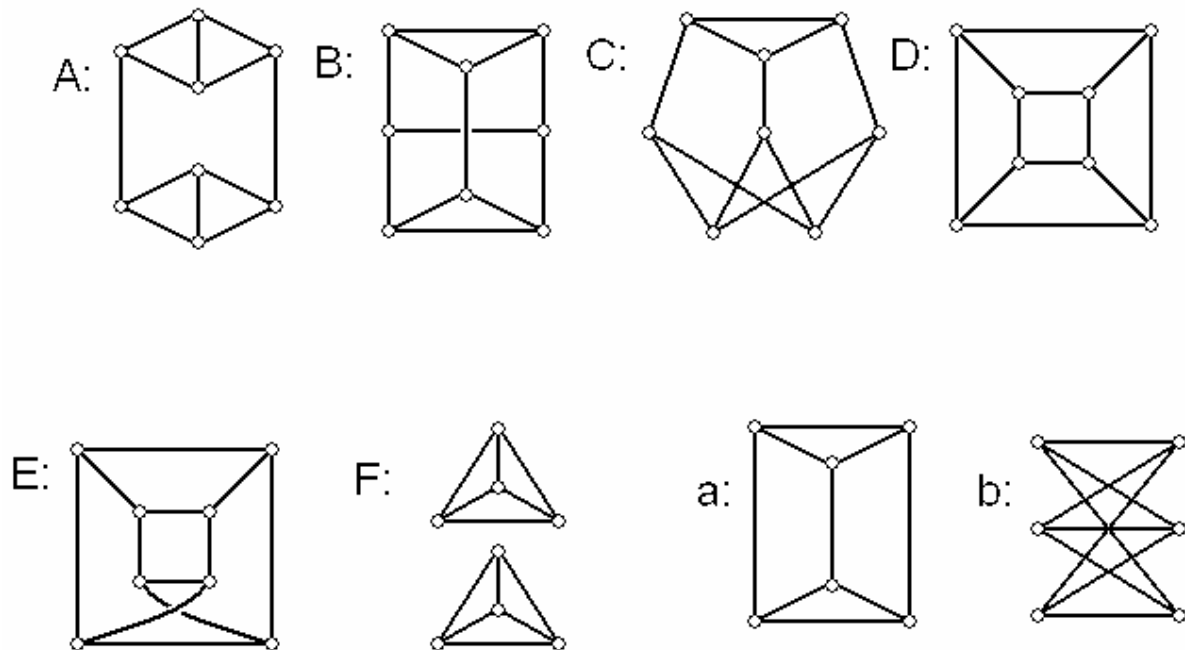


Рис.1. Позначення кубічних графів

У таблиці 1 подано розв'язок поглибленої задачі існування для порядкового типу 0211.

Таблиця 1.

Існування кубічних розкладів порядку 10 типу 0211

k	X=y=a	x=a,y=b	x=y=b	Всього
	A B C D E F	A B C D E F	A B C D E F	
1.	+ + - + + -	+ + + + - +	- - - - - -	9
2.	+ + + + + -	+ + + + + -	- - + - + -	12
3.	+ + + + + -	+ + + + + -	- + + - - -	12
4.	+ + + + + -	+ + + + + -	- + + + + -	14
5.	- + + - - -	+ + - - - -	+ + - - - -	6
6.	+ + + + - +	+ + + + + -	- + - - - -	11
7.	+ + + + + +	- + + - + -	- + - - - -	10
8.	+ + + + + -	+ + - - - -	+ - - - - -	8
9.	+ + + + + -	- + - - + -	- - + - - -	8
10.	+ + + + + -	- + - - + -	- - - - - -	7
11.	+ + + - - -	- + + + - -	- - - - - -	6
12.	+ + + + + -	- + + + + -	- - - - + -	10
13.	+ + + + - -	+ + + - + -	- + - - - -	9
14.	+ - + + + -	+ - - - - +	- - - - - -	6
15.	+ + - - + -	- + - - - -	- - - - - -	4
16.	+ + + + + -	- + - - - -	- - - - - -	6
17.	+ - + + + +	- - + - - -	- - - - - -	6
18.	+ + + + + -	+ - + - - -	- - - - - -	7
19.	- + - - + -	- - - - - -	- - - - - -	2
20.	- - - + - -	- - + - - -	+ + - + - -	5
21.	- - - - - -	- - - - - -	+ - - - - +	2
Всього	84	55	21	160

У цій таблиці знак “+” означає, що існують кубічні розклади порядку 10 типу 0211, з компонентним типом  $(G_k, X; x, y)$ , у яких старша компонента ізоморфна  $G_k$  ( $k=1, \dots, 21$ ), компонента порядку 8 ізоморфна  $X$ ,  $X \in \{A, B, C, D, E, F\}$ , одна з компонент 6 порядку ізоморфна  $x$ , друга – ізоморфна  $y$ , де  $x, y \in \{a, b\}$ . Знак – означає неіснування таких розкладів, тобто, що тип  $(G_k, X; x, y)$  порожній.

Для підтвердження результатів таблиці 1 нижче подані відповідні розклади. Їх побудови проведено з допомогою комп'ютерної програми. Для доведення неіснування розкладу відповідного компонентного типу програма впевнюється у безперспективності всіх можливих шляхів його побудови.

**3. Конструктивне обґрунтування таблиці 1.** Список розділено на 21

частину, по кількості класів ізоморфізму старших компонент. У заголовку кожної частини стоїть канонічна форма відповідної старшої компоненти. Рядок має вигляд “тип – відповідний розклад”, у розкладі старша компонента не повторюється. Найменші компоненти записуються у вигляді, який розшифровано наступним рисунком.

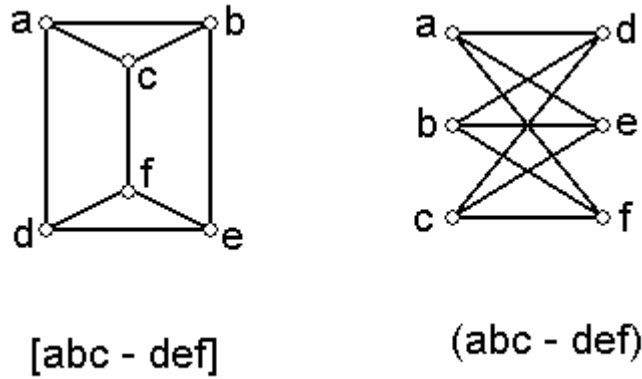


Рис.2. Зображення кубічних графів порядку 6

$G_1$ : 12 13 14 23 24 35 45 56 67 68 79 7A 89 8A 9A

$(G_1, A; a, a)$ : 15 17 18 36 37 39 46 48 49 57 58 69 ; [16A-925], [278-A43]

$(G_1, B; a, a)$ : 16 17 19 25 27 28 36 37 38 58 59 69 ; [15A-874], [26A-943]

$(G_1, D; a, a)$ : 16 17 18 27 28 29 36 37 39 46 48 49; [159-A26], [34A-875]

$(G_1, E; a, a)$ : 15 16 19 27 29 2A 36 37 39 57 5A 6A; [178-A43], [258-694]

$(G_1, A, a, b)$  15 17 19 34 36 38 46 48 57 59 69 78; [16A-825], (234-79A)

$(G_1, B, a, b)$  15 17 19 34 37 39 46 4A 57 5A 69 6A; [259-784], (123-68A)

$(G_1, C, a, b)$  15 16 17 25 29 2A 37 39 3A 57 69 6A; [278-643], (145-89A)

$(G_1, D, a, b)$  15 16 17 34 36 37 48 49 58 59 69 78; [257-6A4], (123-89A)

$(G_1, F, a, b)$  15 17 18 34 36 39 46 49 57 58 69 78; [16A-925], (234-78A)

$G_2$ : 12 13 14 23 24 35 46 56 57 68 79 7A 89 8A 9A

$(G_2, A; a, a)$  15 17 18 36 37 39 45 48 49 58 67 69; [16A-925], [278-A43]

$(G_2, B; a, a)$  15 17 18 36 38 39 45 47 49 58 67 69; [16A-925], [278-A34]

$(G_2, C; a, a)$  15 16 19 25 27 2A 37 39 3A 59 67 6A; [178-A45], [269-834]

$(G_2, D; a, a)$  17 19 1A 28 29 2A 37 38 39 47 48 4A; [158-627], [36A-495]

$(G_2, E; a, a)$  15 16 19 27 29 2A 45 47 49 5A 67 6A; [178-A34], [258-693]

$(G_2, A, a, b)$  15 17 18 34 35 3A 46 4A 57 68 6A 78; [248-793], (125-69A)

$(G_2, B, a, b)$  15 16 18 24 28 2A 34 35 38 4A 56 6A; [279-684], (135-79A)

$(G_2, C, a, b)$  15 17 19 34 35 38 46 49 56 68 78 79 ; [16A-824], (235-79A)

$(G_2, D, a, b)$  15 16 17 24 26 27 34 35 37 4A 5A 6A; [468-957], (134-89A)

$(G_2, E, a, b)$  15 16 17 24 27 2A 34 35 37 46 5A 6A; [268-957], (134-89A)

$(G_2, C, b, b)$  15 16 18 25 26 28 34 36 37 45 47 78; (126–79A),(345–89A)

$(G_2, E, b, b)$  15 16 17 25 26 28 34 36 38 45 47 78; (145–89A),(236–79A)

$G_3$ : 12 13 14 23 24 35 46 57 58 67 69 7A 8A 9A

$(G_3, A; a, a)$  16 17 18 25 26 2A 45 47 4A 5A 68 78; [159–A63],[279–834]

$(G_3, B; a, a)$  15 16 18 25 28 29 34 36 39 48 49 56 ; [179–A45],[26A–783]

$(G_3, C; a, a)$  15 18 19 26 27 28 36 37 38 56 59 79; [16A–784],[25A–943]

$(G_3, D; a, a)$  15 17 1A 25 28 2A 37 38 3A 45 47 48; [168–927],[349–6A5]

$(G_3, E; a, a)$  15 16 19 28 29 2A 45 48 49 5A 68 6A; [178–A43],[256–793]

$(G_3, A, a, b)$  17 18 19 25 26 2A 59 5A 68 6A 78 79; [156–A43],[234–789]

$(G_3, B, a, b)$  15 16 19 34 37 38 45 49 56 68 78 79; [259–6A3],[124–78A]

$(G_3, C, a, b)$  16 17 19 26 27 29 34 36 38 48 49 78; [379–A45],[126–58A]

$(G_3, D, a, b)$  15 16 17 34 38 3A 45 47 5A 68 6A 78; [256–793],[124–89A]

$(G_3, E, a, b)$  15 17 1A 48 49 4A 56 59 68 6A 78 79; [25A–743],[123–689]

$(G_3, B, b, b)$  15 18 1A 34 38 3A 47 49 59 5A 78 79; (123–679),(246–58A)

$(G_3, C, b, b)$  34 37 3A 48 49 56 59 5A 68 6A 78 79; (123–689),(124–57A)

$G_4$ : 12 13 14 23 24 35 46 57 58 69 6A 78 79 8A 9A

$(G_4, A; a, a)$  16 17 1A 26 28 29 48 49 4A 67 7A 89; [159–863],25A–743]

$(G_4, B; a, a)$  15 16 17 25 27 29 34 36 39 47 49 56; [189–A45],[268–A73]

$(G_4, C; a, a)$  15 17 19 25 26 2A 36 39 3A 59 67 7A; [168–A54],[289–734]

$(G_4, D; a, a)$  17 18 19 28 29 2A 37 39 3A 47 48 4A; [15A–627],[368–459]

$(G_4, E; a, a)$  15 17 19 26 27 29 34 36 39 45 47 56 ; [168–A73],[25A–894]

$(G_4, A, a, b)$  16 17 1A 34 36 39 45 49 59 5A 67 7A; [189–562],[234–78A]

$(G_4, B, a, b)$  15 16 17 34 38 39 45 47 59 67 68 89; [256–7A3],[124–89A]

$(G_4, C, a, b)$  16 19 1A 26 29 2A 34 36 37 47 49 7A; [389–A45],[126–578]

$(G_4, D, a, b)$  17 18 19 28 29 2A 37 38 3A 47 49 4A; [15A–627],[356–469]

$(G_4, E, a, b)$  15 17 19 25 27 28 34 37 38 45 49 89; [168–A74],[235–69A]

$(G_4, B, b, b)$  34 37 3A 48 49 56 59 5A 67 68 7A 89; (123–689),(124–57A)

$(G_4, C, b, b)$  15 16 18 25 26 28 37 38 3A 5A 67 7A; (124–79A),(358–469)

$(G_4, D, b, b)$  15 17 18 34 37 38 49 4A 59 5A 7A 89; (123–69A),(246–578)

$(G_4, E, b, b)$  34 37 39 48 4A 56 59 5A 67 68 7A 89; (123–68A),(124–579)

$G_5$ : 12 13 14 23 24 35 46 57 58 69 6A 79 7A 89 8A

$(G_5, B; a, a)$  15 16 19 25 27 2A 36 37 39 5A 67 9A; [178–A43],[268–954]

$(G_5, C; a, a)$  15 17 19 25 26 28 36 38 39 59 67 78; [168–A54],[29A–743]

$(G_5, A, a, b)$  16 17 18 38 39 3A 56 59 5A 67 78 9A; [268–734],[124–59A]

$(G_5, B, a, b)$  16 18 19 37 38 3A 56 59 5A 67 78 9A; [268–934],[124–57A]

(G<sub>5</sub>,A,b,b) 15 17 18 34 37 38 49 4A 59 5A 78 9A; (123–69A),(246–578)

(G<sub>5</sub>,B,b,b) 34 37 39 48 4A 56 59 5A 67 68 78 9A; (123–68A),(124–579)

G<sub>6</sub>: 12 13 14 23 25 36 45 47 58 67 69 7A 89 8A 9A

(G<sub>6</sub>,A;a,a) 15 17 19 25 27 2A 46 49 4A 57 59 6A; [168–A53],[248–937]

(G<sub>6</sub>,B;a,a) 15 16 18 24 27 2A 48 4A 56 57 6A 78; [179–A35],[268–943]

(G<sub>6</sub>,C;a,a) 15 16 18 28 29 2A 48 49 4A 56 59 6A ; [179–A53],[246–738]

(G<sub>6</sub>,D;a,a) 15 16 18 24 27 2A 46 48 57 5A 6A 78; [179–A34],[268–935]

(G<sub>6</sub>,F;a,a) 15 17 19 24 26 2A 46 4A 57 59 79 6A; [168–A53],[278–934]

(G<sub>6</sub>,A,a,b) 15 17 18 34 35 3A 46 4A 57 68 6A 78; [248–793],[125–69A]

(G<sub>6</sub>,B,a,b) 15 16 18 24 28 2A 34 35 38 4A 56 6A; [279–684],[135–79A]

(G<sub>6</sub>,C,a,b) 15 17 19 34 35 38 46 49 56 68 78 79; [16A–824],[235–79A]

(G<sub>6</sub>,D,a,b) 15 16 17 24 26 27 34 35 37 4A 5A 6A; [468–957],[123–89A]

(G<sub>6</sub>,E,a,b) 15 16 17 24 27 2A 34 35 37 46 5A 6A; [268–957],[134–89A]

(G<sub>6</sub>,B,b,b) 15 18 1A 35 37 39 48 49 4A 5A 78 79; (125–679),(236–48A)

G<sub>7</sub>: 12 13 14 23 25 36 45 47 58 69 6A 78 79 8A 9A

(G<sub>7</sub>,A;a,a) 15 16 17 24 26 29 34 37 39 49 56 57; [189–A35],[27A-864]

(G<sub>7</sub>,B;a,a) 15 16 1A 24 28 2A 35 38 3A 46 48 56; [189–762],[349–7A5]

(G<sub>7</sub>,C;a,a) 15 16 19 24 27 29 34 37 39 46 56 57; [17A–862],[35A–894]

(G<sub>7</sub>,D;a,a) 15 16 18 24 27 29 46 48 57 59 67 89; [17A–934],[268–A53]

(G<sub>7</sub>,E;a,a) 15 16 28 26 28 2A 37 38 3A 57 5A 67 ; [17A–924],[359–468]

(G<sub>7</sub>,F;a,a) 15 17 1A 24 28 29 48 49 57 5A 7A 89; [168–953],[267–A43]

(G<sub>7</sub>,B,a,b) 15 16 18 24 26 29 34 35 38 49 56 89; [27A–864],[135–79A]

(G<sub>7</sub>,C,a,b) 15 16 19 24 26 28 34 35 38 49 56 89; [17A–864],[235–79A]

(G<sub>7</sub>,E,a,b) 15 16 19 26 29 2A 37 39 3A 57 5A 67; [17A–824],[369–458]

(G<sub>7</sub>,B,b,b) 15 16 17 24 26 27 48 49 57 59 68 89; (123–89A),(36A–457)

G<sub>8</sub>: 12 13 14 23 25 36 45 47 58 69 6A 79 7A 89 8A

(G<sub>8</sub>,A,a,a) 15 16 19 24 28 2A 48 4A 56 59 68 9A; [178–A53],[267–943 ]

(G<sub>8</sub>,B,a,a) 15 17 19 24 28 2A 48 49 57 5A 78 9A; [168–A43],[267–953]

(G<sub>8</sub>,C,a,a) 16 17 19 24 26 2A 34 37 3A 49 67 9A; [15A–864],[278–953]

(G<sub>8</sub>,D,a,a) 15 16 19 24 27 2A 46 49 57 5A 67 9A; [178–A34],[268–953]

(G<sub>8</sub>,E,a,a) 15 16 19 27 28 29 35 38 39 57 67 68; [178–A34],[246–A95]

(G<sub>8</sub>,A,a,b) 15 16 18 35 39 3A 48 49 4A 56 68 9A; [246–837],[125–79A]

(G<sub>8</sub>,B,a,b) 17 18 19 35 39 3A 48 49 4A 57 5A 78; [156–A92],[236–478]

(G<sub>8</sub>,A,b,b) 15 17 18 35 39 3A 48 49 4A 57 78 9A; (125–69A),(236–478)

- $G_9$ : 12 13 14 23 25 36 47 48 57 58 69 6A 79 8A 9A  
 ( $G_9, A, a, a$ ) 17 18 1A 24 28 29 45 49 59 5A 78 7A; [156–938],[267–A43]  
 ( $G_9, B, a, a$ ) 15 16 17 26 27 29 34 37 39 45 49 56; [189–A35],[24A–867]  
 ( $G_9, C, a, a$ ) 15 17 19 26 29 2A 45 46 4A 59 67 7A; [168–A53],[278–439]  
 ( $G_9, D, a, a$ ) 15 16 17 24 28 2A 45 46 5A 68 78 7A; [189–A34],[267–953]  
 ( $G_9, E, a, a$ ) 15 16 17 26 27 29 34 37 39 45 46 59; [189–A24],[35A–867]
- ( $G_9, B, a, b$ ) 15 17 19 24 27 29 34 37 3A 4A 59 5A; [389–564],[127–68A]  
 ( $G_9, E, a, b$ ) 15 16 17 34 35 37 46 49 59 68 78 89; [267–45A],[123–89A]
- ( $G_9, C, b, b$ ) 15 17 18 35 39 3A 45 49 4A 78 7A 89; (125–69A),(236–478)
- $G_{10}$ : 12 13 14 23 25 36 47 48 57 59 67 6A 89 8A 9A  
 ( $G_{10}, A, a, a$ ) 15 16 1A 34 37 39 46 49 56 5A 79 7A; [178–926],[24A–853]  
 ( $G_{10}, B, a, a$ ) 15 16 19 24 27 28 45 49 56 68 78 79; [17A–835],[269–A43]  
 ( $G_{10}, C, a, a$ ) 15 16 19 24 28 29 34 38 39 45 56 68; [178–A35],[27A–694]  
 ( $G_{10}, D, a, a$ ) 15 18 19 28 29 2A 35 38 3A 45 49 4A; [17A–685],[246–739]  
 ( $G_{10}, E, a, a$ ) 15 16 18 24 28 29 35 38 39 45 46 69; [179–A34],[27A–685]
- ( $G_{10}, B, a, b$ ) 15 16 17 24 27 29 34 35 37 49 56 69; [268–A45],[137–89A]  
 ( $G_{10}, E, a, b$ ) 15 16 17 24 27 28 34 35 37 46 58 68; [269–A54],[137–89A]
- $G_{11}$ : 12 13 14 23 25 36 47 48 57 59 68 69 7A 8A 9A  
 ( $G_{11}, A, a, a$ ) 16 17 19 35 39 3A 45 46 4A 5A 67 79; [158–A62],[249–738]  
 ( $G_{11}, B, a, a$ ) 15 17 18 24 26 28 34 35 37 46 56 78; [16A–972],[389–A54]  
 ( $G_{11}, C, a, a$ ) 15 17 1A 28 29 2A 35 38 39 5A 78 79; [189–654],[267–4A3]
- ( $G_{11}, B, a, b$ ) 15 17 19 35 39 3A 45 46 4A 67 6A 79; [249–738],[125–68A]  
 ( $G_{11}, C, a, b$ ) 15 16 17 26 28 29 35 38 39 56 78 79; [189–A54],[236–47A]  
 ( $G_{11}, D, a, b$ ) 15 17 17 24 26 27 34 35 37 4A 5A 6A; [456–987],[123–89A]
- $G_{12}$ : 12 13 14 23 25 36 47 48 57 59 68 6A 79 8A 9A  
 ( $G_{12}, A, a, a$ ) 15 18 1A 24 29 2A 34 38 39 49 58 5A; [169–728],[37A–564]  
 ( $G_{12}, B, a, a$ ) 15 16 19 27 29 2A 45 49 4A 56 67 7A ; [178–A35],[246–839]  
 ( $G_{12}, C, a, a$ ) 15 16 18 24 27 28 34 35 37 46 58 67; [17A–983],[269–A54]  
 ( $G_{12}, D, a, a$ ) 15 17 1A 27 29 2A 35 39 3A 56 67 69; [189–624],[378–4A5]  
 ( $G_{12}, E, a, a$ ) 16 17 19 26 29 2A 35 37 39 56 5A 7A; [158–A43],[278–469]
- ( $G_{12}, B, a, b$ ) 16 17 19 27 29 2A 34 39 3A 46 4A 67; [15A–837],[259–468]  
 ( $G_{12}, C, a, b$ ) 15 16 17 26 28 2A 35 38 3A 56 78 7A; [189–A54],[236–479]  
 ( $G_{12}, D, a, b$ ) 15 17 19 27 29 2A 35 37 3A 45 49 4A; [246–839],[157–68A]  
 ( $G_{12}, E, a, b$ ) 15 16 17 24 27 29 35 37 39 45 46 69; [189–A34],[257–68A]

(G<sub>12</sub>,E,b,b) 15 16 17 24 26 27 45 49 58 69 78 89; (123–89A),(36A–457)

G<sub>13</sub>: 12 13 14 23 25 36 47 48 57 59 68 6A 7A 89 9A

(G<sub>13</sub>,A,a,a) 16 17 19 35 38 3A 56 5A 69 78 79 8A; [158–A42],[267–943]

(G<sub>13</sub>,B,a,a) 15 17 18 24 26 28 34 35 37 46 58 67; [169–A54],[279–A83]

(G<sub>13</sub>,C,a,a) 15 16 18 24 27 28 34 35 37 46 58 67; [179–A83],[269–A54]

(G<sub>13</sub>,D,a,a) 15 16 17 24 28 29 45 46 58 69 78 79; [18A–934],[267–A53]

(G<sub>13</sub>,A,a,b) 17 18 19 35 38 3A 45 49 4A 5A 78 79; [156–A82],[236–479]

(G<sub>13</sub>,B,a,b) 17 19 1A 35 38 3A 45 49 4A 58 78 79; [156–8A2],[236–479]

(G<sub>13</sub>,C,a,b) 27 29 2A 34 38 3A 45 49 58 5A 78 79; [18A–624],[136–579]

(G<sub>13</sub>,E,a,b) 16 17 18 24 28 29 34 37 38 46 69 79; [267–A58],[134–59A]

(G<sub>13</sub>,B,b,b) 15 17 19 35 38 3A 45 49 4A 78 79 8A; (125–68A),(236–479)

G<sub>14</sub>: 12 13 14 25 26 35 36 47 48 59 6A 79 7A 89 8A

(G<sub>14</sub>,A,a,a) 15 17 18 24 27 2A 34 38 3A 4A 57 58; [19A–645],[239–876]

(G<sub>14</sub>,C,a,a) 15 17 19 23 24 27 39 3A 49 4A 57 5A; [168–A92],[378–465]

(G<sub>14</sub>,D,a,a) 15 17 19 23 27 29 34 38 45 49 58 78 ; [168–A42],[39A–765]

(G<sub>14</sub>,E,a,a) 15 16 19 24 27 29 46 4A 57 5A 67 9A; [178–A32],[349–856]

(G<sub>14</sub>,A,a,b) 23 24 29 34 39 45 57 58 67 68 69 78; [156–9A4],[123–78A]

(G<sub>14</sub>,F,a,b) 15 17 18 23 24 2A 34 3A 4A 57 58 78; [19A–645],[236–789]

G<sub>15</sub>: 12 13 14 25 26 35 37 46 48 59 6A 78 79 8A 9A

(G<sub>15</sub>,A,a,a) 15 16 17 23 24 28 34 38 47 56 57 68 ; [189–A54],[27A–963]

(G<sub>15</sub>,B,a,a) 15 16 17 23 27 29 34 39 45 47 56 69; [189–A24],[368–A76]

(G<sub>15</sub>,D,a,a) 15 17 19 23 27 29 34 36 45 47 56 69; [168–A75],[24A–893]

(G<sub>15</sub>,B,a,b) 15 16 17 23 24 27 34 36 4A 56 5A 7A; [457–986],[123–89A]

G<sub>16</sub>: 12 13 14 25 26 35 37 46 48 59 6A 78 7A 89 9A

(G<sub>16</sub>,A,a,a) 15 16 18 23 24 27 34 38 47 56 58 67; [179–A54],[28A–963]

(G<sub>16</sub>,B,a,a) 15 16 18 23 28 29 39 3A 56 5A 69 8A; [179–A24],[368–475]

(G<sub>16</sub>,C,a,a) 15 16 19 28 29 2A 38 39 3A 56 5A 68; [18A–754],[234–769]

(G<sub>16</sub>,D,a,a) 15 16 17 24 28 29 45 47 58 68 69 79; [18A–934],[23A–765]]

(G<sub>16</sub>,E,a,a) 15 16 18 23 27 28 36 3A 57 5A 67 8A; [179–A42],[349–856]

(G<sub>16</sub>,B,a,b) 15 16 19 38 39 3A 45 49 4A 56 68 8A; [234–967],[125 –78A]

G<sub>17</sub>: 12 13 14 25 26 35 37 46 48 59 6A 79 7A 89 8A

(G<sub>17</sub>,A,a,a) 15 16 18 24 28 2A 34 36 3A 4A 56 58; [19A–745],[239–786]

(G<sub>17</sub>,C,a,a) 15 18 19 23 24 28 39 3A 49 4A 58 5A; [167–A92],[368–457]  
 (G<sub>17</sub>,D,a,a) 15 16 19 23 24 27 36 39 45 49 57 67; [178–A43],[29A–865]  
 (G<sub>17</sub>,E,a,a) 15 16 19 23 27 29 34 36 45 49 57 67; [178–A42],[39A–865]  
 (G<sub>17</sub>,F,a,a) 15 16 17 23 24 29 34 39 49 56 57 67 ; [19A–863],[278–A45]

(G<sub>17</sub>,C,a,b) 15 16 19 23 24 29 36 3A 45 4A 56 9A; [349–876],[125–78A)

G<sub>18</sub>: 12 13 14 25 26 35 37 48 49 58 69 6A 79 7A

(G<sub>18</sub>,A,a,a) 15 16 18 23 29 2A 39 3A 56 5A 68 89; [19A–754],[278–463]

(G<sub>18</sub>,B,a,a) 15 16 19 23 24 28 38 39 45 46 59 68; [178–A29],[34A–675]

(G<sub>18</sub>,C,a,a) 15 16 18 24 28 2A 34 38 3A 46 56 5A; [19A–754],[239–768]

(G<sub>18</sub>,D,a,a) 15 16 19 23 24 2A 36 39 45 46 5A 9A; [178–A43],[289–765]

(G<sub>18</sub>,E,a,a) 15 16 19 23 29 2A 36 3A 57 5A 67 9A; [178–A42],[389–465]

(G<sub>18</sub>,A,a,b) 15 16 18 34 39 3A 45 4A 56 68 89 9A; [238–467],[125–79A)

(G<sub>18</sub>,C,a,b) 15 18 19 24 28 2A 34 38 3A 45 59 9A; [239–768],[145–67A)

G<sub>19</sub>: 12 13 14 25 26 37 38 49 4A 57 59 68 6A 7A 89

(G<sub>19</sub>,B,a,a) 15 16 18 23 24 27 35 36 47 48 58 67; [179–A82],[39A–465]

(G<sub>19</sub>,E,a,a) 15 16 18 24 28 29 45 46 5A 69 8A 9A; [179–A23],[356–487]

G<sub>20</sub>: 12 13 14 23 24 34 56 57 58 67 69 7A 89 8A 9A

(G<sub>20</sub>,D,a,a) 15 16 18 25 26 29 35 38 39 46 48 49; [179–A45],[278–A36]

(G<sub>20</sub>,C,a,b) 15 16 19 26 27 2A 36 37 3A 59 5A 79; [178–A46],[234–589)

(G<sub>20</sub>,A,b,b) 15 19 1A 26 27 28 59 5A 68 6A 78 79; (134–678),(234–59A)

(G<sub>20</sub>,B,b,b) 15 16 19 27 28 2A 59 5A 68 6A 78 79; (134–78A),(234–569)

(G<sub>20</sub>,D,b,b) 15 16 17 28 29 2A 59 5A 68 6A 78 79; (134–89A),(234–567)

G<sub>21</sub>: 12 13 14 23 24 34 58 59 5A 68 69 6A 78 79 7A

(G<sub>21</sub>,A,b,b) 15 16 18 27 29 2A 56 57 67 89 8A 9A; (134–79A),(234–568)

(G<sub>21</sub>,F,b,b) 15 16 17 28 29 2A 56 57 67 89 8A 9A; (134–89A),(234–567)

**4. Висновки і перспективи.** Як впливає з таблиці 1, з 378 можливих компонентних типів рядкового типу 0211 рівно 160 типів не порожні. Крім того, помітна тенденція зменшення кількості непорожніх компонентних типів зі зростанням кількості найменших компонент виду  $K_{3,3}$ .

Ми збираємося продовжити дослідження сформульованої задачі стосовно ще не розглянутих рядкових типів. Зазначимо, що дослідження кубічних розкладів порядку 13 розпочато в роботі [10], де перераховано можливі рядкові типи для цього випадку. Маємо на увазі, що чекають дослідження розклади графів  $K_n$  на регулярні графи степеня  $k > 3$ .

## БІБЛІОГРАФІЯ

1. Kirkman T.P. On a problem in combinations.// Cambridge and Dublin Math.Journal, 1847, 2, 191–204.
2. Dickson L.E., Safford F.N. Solution to problem 8.// Amer. Math. Monthly, 1906, 13, 150–151.
3. Mathon R., Rosa A. Tables of parameters of BIBDs with  $r \leq 41$  including existence, enumeration and resolvability results: an update.// Ars Combinatoria, 1990, 30, 65–96.
4. Петренюк А.Я. Про перелік кубічних розкладів повного графу  $K(10)$ . //П'ята міжнародна конференція ім. акад. М.Кравчука , Тези доповідей, Київ, 1996, стор.332.
5. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Реалізованість типів кубічних розкладів графу  $K_{10}$ . // Третя міжнародна науково-практична конференція “Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем”. 16–18 листопада 2005 р. Тези доповідей, Дніпропетровськ ,2005, 139–140.
6. Petrenjuk A.J. Decomposing  $K_{10}$  into cubic graphs of order 6. // Bull. Inst. Combin. Appl., 1994,12, 9–14.
7. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. К перечислению неизоморфных разложений графа  $K(10)$  на кубические факторы. //Гос. летная академия Украины.–Кировоград, 1997.– 186 с.(Деп. в ГНТБ Украины 18.06.97. №377–Ук97)
8. Petrenjuk A.J. Enumerating decompositions of  $K(10)$  into isomorphic cubic factors. //В зб. “Світогляд”, вип..2, Кировоград, 1996, 52–60.
9. Бараев А.М., Фараджев И.А. Построение и исследование на ЭВМ однородных и однородных двудольных графов. //В сб. ”Алгоритмические исследования в комбинаторике”, Москва, 1978, .
10. Петренюк Д.А. Перелік можливих типів кубічних розкладів графу  $K_{13}$ . //Третя міжнародна науково-практична конференція “Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем”. 16–18 листопада 2005 р. Тези доповідей. Дніпропетровськ, 2005, 137–138.

*Кіровоградський Національний  
технічний університет*

*Надійшло 9 січня 2006 р.*

УДК 519.53 + 517.987

## ПРЕДЕЛЫ ВЕКТОРНЫХ МЕР В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

**В.А. Романов**

Розв'язане питання про те, які міри в просторах Фреше можуть бути зображені як границі аналітичних векторних мір в топологіях збіжності за варіацією, відносно напівваріації та збіжності на системі вимірних множин.

It is solved a problem: Which measures in Frechet spaces could be represented as limits of analytic vector measures in topologies of variational convergence, semi-variational convergence and convergence on every measurable set.

Введение. Известно, что класс локально выпуклых пространств, в отличие от более узкого класса банаховых пространств, имеет то преимущество, что он замкнут относительно операций индуктивных и проективных пределов, используемых во многих конструкциях функционального анализа, в том числе при построении различных вариантов теории обобщенных функций. Среди локально выпуклых пространств наибольшее значение имеют пространства Фреше, то есть полные метризуемые локально выпуклые пространства. Именно такими являются важные для применений пространства финитных и быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, а также сопряженные к ним. При этом для сходящейся последовательности мер, сосредоточенных на монотонно возрастающих по включению банаховых пространствах, индуктивный предел которых совпадает с пространством финитных функций, предельная мера уже не помещается, вообще говоря, ни в какое из банаховых пространств. Таким образом, становится актуальным исследование предельных переходов с мерами, в том числе с векторными, заданными в пространствах Фреше.

2. Постановка задачи. Пусть  $X$  – сепарабельное пространство Фреше,  $Y$  – банахово пространство. Под  $Y$ -значной мерой в пространстве  $X$  понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, которая определена на всех борелевских подмножествах пространства  $X$  и принимает значения в пространстве  $Y$ .

Пусть  $L$  – линейное подпространство пространства  $X$ . В соответствии с работой [ 1 ] меру называем  $L$ -аналитической, если для любого элемента  $h$  из  $L$  и каждого борелевского подмножества  $E$  пространства  $X$  функция действительного аргумента, значение которой в точке  $t$  равно значению меры на множестве  $E + th$ , может быть аналитически продолжена в некоторую окрестность нуля комплексной плоскости, не зависящую от  $E$ .

Напомним, что векторная мера называется  $L$ -непрерывной в данной топологии, если для каждого направления  $h$  из  $L$  бесконечно малые сдвиги

вдоль  $h$  приводят к бесконечно малому относительно этой же топологии изменению векторной меры.

Напомним также, что в пространстве векторных мер основными являются топологии сходимости по вариации, относительно полувариации и сходимости на системе измеримых множеств.

Цель статьи состоит в том, чтобы для указанных трех топологий установить критерии представимости векторной меры, заданной в пространстве Фреше, в виде предела последовательности аналитических векторных мер.

### 3. Результаты работы.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $X$  – сепарабельное пространство Фреше,  $L$  – линейная оболочка последовательности его линейно независимых элементов,  $Y$  – банахово пространство. Тогда для представимости  $Y$ -значной меры  $m$  в пространстве  $X$  в виде вариационного предела последовательности  $L$  – аналитических мер необходимо и достаточно, чтобы она была вариационно  $L$ -непрерывной.

Доказательство. Сначала отметим, что множество вариационно непрерывных мер замкнуто относительно операции предельного перехода по вариации. Для заданных в пространстве Фреше мер этот факт доказывается аналогично теореме 2 работы [3]. Отсюда и из вариационной непрерывности каждой аналитической меры вытекает необходимость.

Остается доказать достаточность. Из результатов [4, с.63-68] и [5, с.57] следует существование такого включающего  $L$  линейного подпространства  $H$  пространства  $X$  и такого скалярного произведения на  $H$ , что  $H$  становится сепарабельным гильбертовым пространством с компактным каноническим вложением в  $X$ , а  $L$  – всюду плотным в  $H$  линейным подпространством. Это подпространство можно рассматривать как линейную оболочку некоторого ортонормированного базиса. Поскольку мера  $m$  непрерывна по всем базисным направлениям, то можно применить рассуждения, приведенные в ходе доказательства теоремы 20 работы [3], а потому мера является операторно-вариационно непрерывной в том смысле, что найдется оператор  $A$  с ядерным квадратом, действующий из  $H$  снова в  $H$ , для которого все векторы упомянутого базиса суть собственные и для которого полная вариация разности между исходной мерой и ее сдвигом на образ вектора относительно оператора  $A$  имеет нулевой предел, когда норма вектора стремится к нулю.

Пусть  $p$  – гауссова мера в  $H$  с нулевым средним, корреляционный оператор которой совпадает с квадратом оператора  $A$ , и пусть  $p^{(n)}$  – последовательность гауссовских мер, задаваемых на борелевских множествах  $B$  из  $H$  формулой

$$p^{(n)}(B) = p(nB).$$

Рассмотрим последовательность векторных мер, значения которых на борелевских подмножествах  $E$  пространства Фреше  $X$  задаются как

интегралы Бохнера по гильбертовому пространству  $H$  относительно указанных гауссовских мер  $\rho$  ( $n$ ) от одной и той же векторнозначной функции, ставящей в соответствие каждому элементу  $h$  из  $H$  векторную величину  $m(E + A(h))$ .

При этом операторно-вариационная непрерывность меры  $m$  обеспечивает непрерывность подынтегральной функции и, следовательно, соответствующие интегралы Бохнера существуют.

Поскольку гауссовские меры  $\rho$  ( $n$ ), относительно которых ведется интегрирование,  $L$ -аналитичны, то получающиеся векторные меры тоже  $L$ -аналитичны.

Наконец, по соображениям, которые аналогичны рассуждениям, приведенным в ходе доказательства теоремы 70 работы [3], построенная последовательность  $L$ -аналитических векторных мер вариационно сходится к данной векторной мере, чем и завершается доказательство.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть пространства  $X$ ,  $Y$  и подпространство  $L$  - такие же, как в теореме 1. Тогда для представимости  $Y$ -значной меры  $m$  в пространстве  $X$  в виде полувариационного предела последовательности  $L$ -аналитических мер необходимо и достаточно, чтобы она была полувариационно  $L$ -непрерывной.

Доказательство. Необходимость вытекает из замкнутости множества полувариационно непрерывных мер относительно операции полувариационного предельного перехода и полувариационной непрерывности аналитических мер.

Для доказательства достаточности рассмотрим такое же, как в доказательстве теоремы 1, сепарабельное гильбертово пространство  $H$  с компактным каноническим вложением в  $X$ . На этот раз в соответствии с теоремой 68 работы [3] из полувариационной  $L$ -непрерывности меры следует ее операторно-полувариационная непрерывность, которая отличается от операторно-вариационной непрерывности тем, что вместо полной вариации приращения меры в соответствующем предельном выражении фигурирует ее полная полувариация.

Далее зададим последовательность  $L$ -аналитических векторных мер с помощью интегралов Бохнера относительно тех же самых гауссовских мер и от той же векторнозначной функции, что и при доказательстве теоремы 1. На этот раз непрерывность подынтегральной функции обеспечивается операторно-полувариационной непрерывностью меры.

Наконец, по соображениям, которые аналогичны рассуждениям, приведенным в ходе доказательства теоремы 69 работы [3], построенная последовательность аналитических векторных мер сходится к данной векторной мере полувариационно, чем и завершается доказательство.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть пространства  $X$ ,  $Y$  и подпространство  $L$  - такие же, как в теореме 1. Тогда для представимости  $Y$ -значной меры  $m$  в пространстве  $X$  в виде предела относительно сходимости на системе измеримых множеств

последовательности  $L$ -аналитических мер необходимо и достаточно, чтобы она была  $L$ -непрерывной относительно этой же сходимости.

Доказательство. Сначала отметим, что для пространства Фреше замкнутость совокупности непрерывных в смысле сходимости на системе измеримых множеств мер относительно этой же сходимости доказывается аналогично теореме 51 работы [3]. Отсюда и из непрерывности аналитических мер вытекает необходимость.

Остается доказать достаточность. Отметим, что вариация  $\nu(m)$   $L$ -непрерывной в указанном смысле меры  $m$   $L$ -непрерывна. Для пространств Фреше этот факт доказывается аналогично теореме 49 работы [3]. Далее рассмотрим такое же, как в доказательстве теоремы 1, сепарабельное гильбертово пространство  $H$  с компактным каноническим вложением в  $X$ . После этого выберем оператор  $A$  с учетом операторной непрерывности не самой меры (которая ничем не гарантируется), а ее вариации  $\nu(m)$  (что гарантируется теоремой 20 работы [3]).

Далее зададим последовательность аналитических векторных мер с помощью таких же интегралов Бохнера относительно гауссовских мер  $\rho(n)$ , как и в доказательстве теоремы 1. На этот раз непрерывность подынтегральной функции можно обеспечить с помощью аппроксимации компактами относительно  $\nu(m)$  борелевского подмножества  $E$  пространства  $X$  и его дополнения до всего  $X$ .

Далее отметим, что норма разности значений  $n$ -й меры построенной последовательности и данной меры  $m$  на борелевском множестве  $E$  не превосходит интеграла относительно гауссовской меры  $\rho(n)$  от нормы векторнозначной величины

$$m(E + A(h)) - m(E).$$

Разбив последний упомянутый интеграл в сумму интегралов по шару малого радиуса пространства  $H$  и по его дополнению до  $H$  и учитывая непрерывность подынтегрального выражения, убеждаемся, что построенная последовательность аналитических векторных мер сходится к данной векторной мере на системе измеримых множеств, чем и завершается доказательство.

### БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бенткус В.Ю. Аналитичность гауссовских мер // Теор. вероятн. и ее примен. – 1982. – 27, № 1. – С. 147–154.
2. Романов В.А. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мер // Матем. Заметки. – 1995. – 57, № 2. – С. 310–312.
3. Романов В.О. Неперервні міри. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2004.–64 с.
4. Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
5. Богачев В.И. Пренебрежимые множества в локально выпуклых пространствах // Матем. Заметки. – 1984. – 36, № 1. – С. 51–64.

УДК 534+517

## МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМИ

### З.Ю. Філер

Системи із запізненням стали об'єктом систематичного дослідження із середини ХХ століття. Моделювання цих об'єктів веде до диференціальних рівнянь із запізненим аргументом. Як їх інтегрування, так і вивчення стійкості вимагають неklasичних підходів.

The delayed systems became object of regular research from the middle 20 century. Modelling of these objects gives the differential equations with late argument. Both their integration, and reseaching of stability, demand nonclassical approaches.

**Вступ.** Системи із запізненням стали об'єктом систематичного дослідження з середини ХХ стор., коли у радіотехніці з'явилися лінії затримки та швидкодія (тактова частота) пристроїв почали вимагати врахування часу переходу сигналу (зусилля) з одного кінця провідника (стержня) до іншого завдяки скінченій швидкості хвильових процесів у ньому. З початком космічної ери навіть швидкість світла не забезпечує практичної миттєвості передачі сигналу. Так, час на посилення керуючого сигналу з ЦУП на Землі до його отримання об'єктом на Місяці та відправлення сигналу – відповіді й прийняття його ЦУП досягає майже 3 с. За цей час ситуація на керованому об'єкті суттєво змінюється, що й обмежує можливості дистанційного управління ним із Землі. Ще безнадійніше управління із Землі об'єктом на Марсі, відстань від якого, навіть у протистоянні, більше, ніж від Місяця у 125 разів. Навіть мікромініатюризація сучасних ЕОМ не відмінє необхідності враховувати наявність запізнення у передачі даних по їх шинах й окремих елементах при вже досягнутій швидкодії за рахунок високої тактової частоти роботи ЕОМ. Математичне моделювання цих об'єктів здійснюється за допомогою або систем рівнянь в частинних похідних з граничними умовами у вигляді звичайних диференціальних рівнянь (ДР), або звичайних диференціальних рівнянь із членами, частина яких має аргумент із запізненням на час переходу відповідного сигналу (зусилля). Рівняння мають принципові відміни від класичних систем. Як їх аналітичне та чисельне інтегрування, так і з'ясування стійкості вимагають узагальнень класичних підходів. Цим проблемам та методиці їх викладання й присвячена стаття автора.

У курсах математики та фізики педагогічних навчальних закладів та технічних ВНЗ ці питання або не розглядають взагалі або розглядають їх тільки на описовому рівні, незважаючи на невпинне зростання ролі таких систем у техніці. Автор розглядав їх як у викладанні в Донецькому політехнічному інституті (ДПІ) курсу «Диференціальні рівняння» та в спецкурсі, присвяченому проектуванню вібросистем за допомогою ЕОМ, так і використовував у дослідженні протяжних об'єктів (горизонтальних віброплощадок для формування виробів із бетонних сумішей, віброударного способу послаблення вугільного масиву, коливанням вертикальних трубопроводів (райзерів) тощо) у 1970 – 80 –х рр.. Викладаючи математичний аналіз у КДПУ, автор розглядав

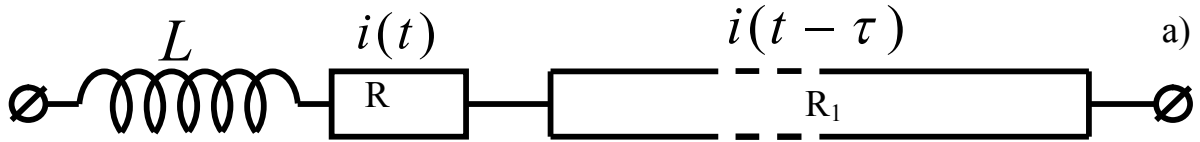
відповідну тему із студентами 2 – 3 – х курсів спеціальностей «Математика – фізика» та «Фізика – математика», давав теми для курсових та дипломних робіт. Разом із студентами були розроблені оригінальні алгоритми. По деяких аспектах були і публікації в журналах та тезах доповідей [1, 2, 3]. У 2002-2004 навчальних роках матеріал викладався в спецкурсі «Елементи теорії коливань при різанні металів» для студентів спеціальності «Трудове навчання», який читався на 3 та 5 курсах. У поточному 2005-06 навчальному році таким системам була присвячена значна частина спецкурсу “Стійкість лінійних систем” для магістрантів спеціальності “Математика”.

**1. Трохи історії.** Диференціальними рівняннями першого порядку із запізненням (ДРЗ)  $\tau$  називають рівняння  $x'(t)=f(x(t), x(t-\tau), t)$ . Величина  $\tau$  може бути сталою, або залежати від  $t$  і навіть  $x(t)$ . Вперше окремі такі рівняння з’являються у публікаціях Кондорсе (1771 р.), але систематичне вивчення таких рівнянь починається лише у ХХ стор., особливо в кінці 40-х рр. (А.Д. Мишкіс у СРСР, Е.М. Райт і Р. Беллман у США). Вони знаходять багато застосувань у теоріях автоматичного управління, автоколивань, при дослідженні горіння в ракетних двигунах, у проблемах довгострокового прогнозування в економіці, біофізиці, багатьох інших проблемах науки й техніки. Це стимулює бурхливий розвиток теорії ДРЗ. Їх ще називають рівняннями з *післядією*. Вони з’являються завжди, коли у фізичній, біологічній чи технічній задачі сила (вплив), яка діє на матеріальну точку (тіло, популяцію) залежить від швидкості та/чи положення її не тільки в даний момент, а й в якісь попередні моменти, які відрізняються на  $\tau_k$  одиниць. Наявність запізнення може стати причиною нових явищ, зокрема, автоколивань, які самозбуджуються, нестійкості процесів тощо. Великий внесок у вивчення проблем ДРЗ уніс відомий математик Л.Е. Ельсгольц та його учні [4].

**2. Прості фізичні задачі, які приводять до ДР із запізненням.** Крім указаних у попередніх пунктах ситуаціях, пов’язаних із скінченністю швидкості розповсюдження сигналів (сил), у техніці застосовуються елементи, у яких їх затримка створюється спеціально [5]. Це так звані *лінії затримки*. Їх застосовують в імпульсних пристроях. Електричні лінії затримки мають  $\tau$  до десятків мксек, а ультразвукові – до тисяч мксек. Генератори затриманих імпульсів мають електронний релаксаційний пристрій з одним стійким станом рівноваги (мультивібратором) та пристроєм формування імпульсів. Час затримки  $\tau$  може плавно регулюватися пропорційно управляючій напрузі. Такі лінії застосовують у ядерній фізиці, в індикаторах та інших елементах радіолокаційних станцій, в пристроях кодування та декодування імпульсів, у електронних комутаторах. Найпростішою схемою є ланцюг з котушкою з індуктивністю  $L$ , резистором  $R$  та довгою лінією з сумарним опором  $R_1$  та з часом  $\tau$  проходження по ній струму. Механічним прикладом є коливання тіла з масою  $m$  на пружних елементах з жорсткістю  $C$  та на довгому канаті з сумарною жорсткістю  $C_1$ , час проходження силового імпульсу по якому дорівнює  $\tau$  (Рис. 1).

Фізичні системи із запізненням

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + R_1 i(t - \tau) = 0$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + Cx(t) + C_1 x(t - \tau) = 0$$

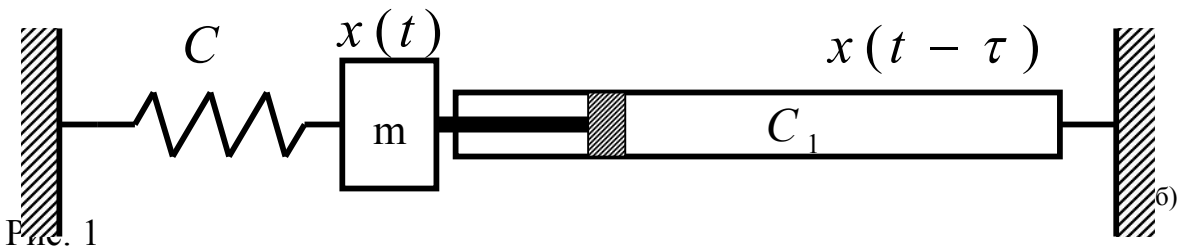
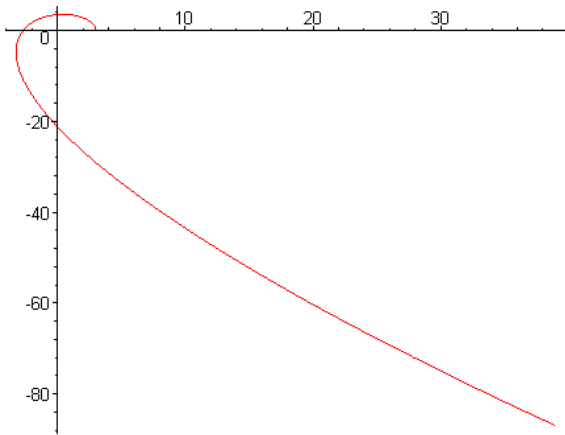


Рис. 1

Годографи:

- а) не фінітований;
- б) фінітований без запізнення;
- в) фінітований із запізненням.



а)

$$1,5y^{(4)}(t) + 4y'''(t) + 5y''(t) + 7y'(t) + 3y(t) = 0$$

$$1,5y^{(4)}(t) + 4y'''(t) + 5y''(t) + 5y'(t) + 2y'(t-1) + 3y(t) = 0$$

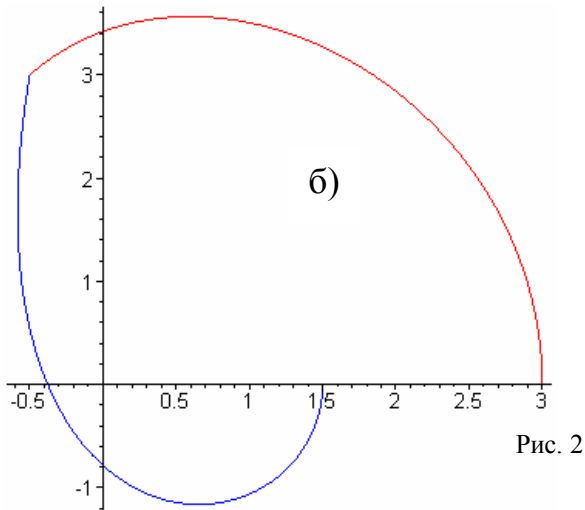
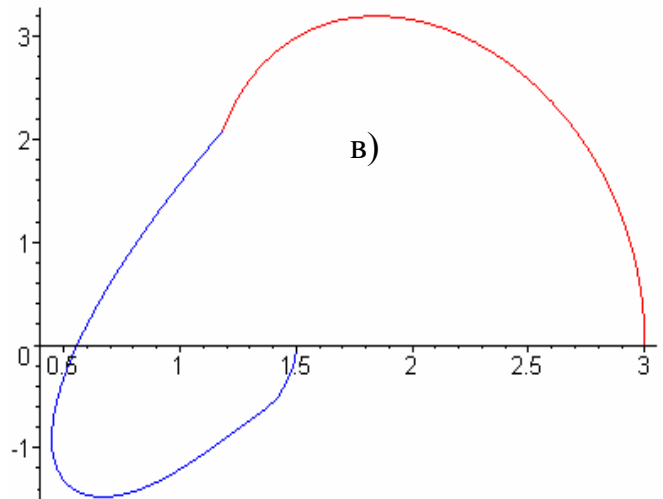


Рис. 2



Прикладами системи рівнянь із змінним  $\tau$  є моделі різноманітних наслідків змін сонячної активності (СА), бо навіть електромагнітні хвилі доходять до Землі від активних зон на Сонці за 8 хвилин, а потоки часток від плям (в основному, протонів) рухаються із швидкістю 300...1000 км/сек. й доходять до Землі за 2...5 діб. Тільки після цього, як сигнал дійде до відповідної земної сфери, він почне змінювати її стан. Завдяки зміні положення плями відносно центрального меридіану в зв'язку з власним обертанням Сонця та рухом Землі по орбіті, величина  $\tau$  буде теж змінюватися.

Для рівнянь із запізненням аналогом задачі Коші для рівняння  $x'(t)=f(x,t)$  з початковою умовою  $x(t_0) = x_0$  є вище наведене рівняння з умовою  $x(t) = \varphi(t)$  при  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ , де  $\varphi(t)$  є задана *початкова функція*. Її розв'язання чисельним методом достатньо стандартно; треба лише зберігати у пам'яті на кожному відрізку довжиною  $\tau$  значення розв'язку на попередньому такому відрізку. Найбільш просто організувати цей процес удається при сталому  $\tau$ . Для цього необхідно зберігати й оновлювати на кожному кроці масив значень  $x(t)$  на проміжку зліва від поточного  $t$  довжиною  $\tau$ . У простих випадках можна шукати й аналітичний вираз розв'язку у вигляді функції, заданої різними формулами на кожному з відрізків довжини  $\tau$ , починаючи від точки  $t_0 - \tau$ .

**3. Автономні лінійні ДР із запізненнями.** Для випадку ДРЗ 1-го порядку маємо рівняння  $x'(t) = ax(t) + vx(t-\tau) + c$ , де  $a, v, c$  – сталі. Методи його розв'язання схожі з методами розв'язання звичайних лінійних ДР (без запізнення) зі сталими коефіцієнтами. Для відповідного однорідного рівняння

$$x'(t)=ax(t)+vx(t-\tau) \quad (1)$$

виділимо три методи:

**1) Операційний метод розв'язання ДР із запізненнями.** Він ґрунтується на теоремі запізнення операційного числення: якщо образом функції  $f(t)$  при перетворенні Лапласа є функція  $F(p)$ , то образом функції  $f(t - \tau)$  є добуток  $F(p)$  на  $e^{-p\tau}$ . Разом з теоремою диференціювання оригінала та властивістю лінійності оператора Лапласа замість диференціального рівняння отримаємо лінійне відносно  $F(p)$  алгебраїчне рівняння  $pF(p) - x(0) = (a + ve^{-p\tau})F(p) + c/p$ . Звідси  $F(p) = (x(0) + c/p) / (p - (a + ve^{-p\tau}))$ . Відповідний оригінал можна знайти за спеціальними таблицями.

**2) Метод Ейлера пошуку часткового розв'язку однорідного рівняння у вигляді показникової функції  $\exp(\lambda t)$ .** Це дає *характеристичне рівняння*

$$F(\lambda) \equiv \lambda - (a + ve^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (2)$$

Його ліва частина є *квазіполіном*. У загальному випадку воно має безліч [4, с. 70] комплексних коренів; при дійсних  $a$  та  $v$  корені комплексно спряжені. Комплексному  $\lambda = \alpha + i\beta$  відповідають члени типу  $e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$  з довільними сталими  $C_1$  і  $C_2$ . Вони відповідають

затухаючим коливанням з декрементом  $\alpha < 0$  та наростаючим коливанням з інкрементом  $\alpha > 0$  та частотою  $\beta$ .

**3) Розкладання по степенях малого запізнення.** Замінюючи  $x(t-\tau)$  за формулою Тейлора на  $x(t)-\tau x'(t)$ , отримаємо наближене звичайне диференціальне рівняння (без запізнення)  $x'(1+\tau v) = (a+v)x$ , характеристичне рівняння якого  $\lambda(1+\tau v) = (a+v)$  має один дійсний корінь, який відповідає розв'язку  $x = C \cdot \exp((a+v)/(1+\tau v)t)$ . При  $(a+v)/(1+\tau v) > 0$  очевидне необмежене наростання  $x(t)$ , тобто нестійкість розв'язків. Утримання члену другого степеня відносно  $\tau$  дає рівняння 2-го порядку з малим параметром при старшій похідній. При довільному завданні початкових умов утворюється швидка зміна розв'язку в *примежовому шарі*. Наявність у “задачі Коші” довільної аналітичної початкової функції  $\varphi(t)$  адекватно завданню нескінченної послідовності її похідних у початковій точці  $t_0$ , а це й відповідає ДР нескінченного порядку.

**4. Методи пошуку коренів квазіполіному (2).** Для функції  $F(\lambda)$  маємо при дійсному  $\lambda$  похідну  $F'(\lambda) = 1+\tau v e^{-\lambda\tau}$ . При  $v < 0$  воно має один дійсний корінь  $\lambda_0 = \ln(\tau|v|)/\tau$ , який дає точку екстремуму функції  $F(\lambda)$ . Друга похідна  $F''(\lambda) = -\tau^2 v e^{-\lambda\tau}$  при цьому додатна, тому ця точка дає *мінімум*. Якщо він додатний, тобто  $F(\lambda_0) > 0$ , то дійсних коренів характеристичне рівняння немає. Для пошуку *комплексних* коренів ми пропонуємо такий *метод*. Взевши для дійсної частини кореня наближення  $\alpha_0 = \lambda_0$ , для уявної  $\beta_0$  частини з формули Тейлора отримаємо рівняння  $F(\lambda_0) - F''(\lambda_0)/2\beta_0^2 \approx 0$ . Звідси  $\beta_0^2 \approx 2F(\lambda_0)/F''(\lambda_0)$ . Далі для початкового наближення до комплексного кореня  $\lambda = \alpha + i\beta$  отримаємо  $\lambda_1 = \alpha_0 + i\beta_0$ . Його можна вточнити далі методом Ньютона *ітераціями*  $\lambda_1 := \lambda_1 - F(\lambda_1)/F'(\lambda_1)$ , бо  $F'(\lambda_1) \neq 0$ . Про це є згадка в [4, с. 75], але не сказано, як знайти *початкове* наближення. Пропоноване нами початкове значення  $\alpha_0$  дійсної частини кореня є *точним* для квадратичної функції  $F(\lambda)$ . У [4, с. 74] вказуються *асимптотичні* формули для великих за модулем коренів (формула (28)). Для уточнення їх можна теж використати метод Ньютона. Легко врахувати й третю похідну функції  $F(\lambda_0)$ , замінюючи  $(i\beta)^3$  на  $-i\beta_0^2\beta$ . Це дасть для  $\beta$  *квадратне* рівняння з членом першого степеня відносно  $\beta$  з коефіцієнтом  $-i\beta_0^2 F'''(\lambda_0)/6$ . Поява комплексних коренів у таких системах свідчить про *збудження* за рахунок запізнення *коливань* у системі, яка без запізнення немає власних коливальних властивостей. Відома в медицині “хвороба алкоголіків” *тремор*, коли дрижать руки, є наслідком запізнь у передачі сигналів у системі око-мозок-рука.

**5. Стійкість систем зі сталими запізненнями.** Якщо *найбільша* дійсна частина коренів характеристичного полінома від'ємна, то розв'язки ДРЗ *асимптотично стійкі*. Але для встановлення стійкості зовсім немає потреби пошуку цих коренів. Для звичайних ДР зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (3)$$

необхідною умовою є додатність всіх  $a_k$ . Але вона не є достатньою, що засвідчує простий приклад: характеристичний многочлен  $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6$  має дійсний корінь  $\lambda_1 = -2$  та пару комплексних коренів з дійсною частиною  $+1/2$ , що свідчить про нестійкість розв'язків. Існує багато ознак – критеріїв (необхідних та достатніх умов) асимптотичної стійкості (Рауса, Гурвіца, Ляпунова – Шипара тощо), які використовують нерівності для виразів, побудованих з коефіцієнтів характеристичного рівняння. На жаль, вони не узагальнюються на рівняння із запізненнями.

**5.1. Критерій Михайлова.** У 1938 році А.В. Михайловим запропонований геометричний критерій асимптотичної стійкості систем, які описуються рівняннями (3): для стійкості розв'язків необхідно й достатньо, щоби годограф функції  $F(i\omega)$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  зробив поворот  $\Phi$  навколо точки  $O$  на кут  $n\pi/2$ . При  $\Phi < n\pi/2$  рівняння нестійке [6, с. 797 - 798]. Ми довели, використовуючи принцип аргументу, що цей критерій переноситься й на системи зі сталими запізненнями. При цьому крім степеневих членів  $a_0 - a_2\omega^2 + \dots + i(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)$  будуть ще степеневі тригонометричні доданки  $v_0\cos\omega\tau_0 + v_1\omega\sin\omega\tau_1 - v_2\omega^2\cos\omega\tau_2 + \dots + i(v_1\omega\cos\omega\tau_1 - v_0\sin\omega\tau_0 + \dots)$ . Недоліками цього критерія є його “геометричний” характер й нескінченість проміжку зміни  $\omega$ . Ми ще на початку 80-х рр. запропонували як “алгебраїзацію” критерія Михайлова, так і його фінітизацію, використовуючи це в курсі “Диференціальні рівняння” у Донецькому політехнічному інституті (ДПІ). Ще раніше у “Методичних указівках,,” [7, с. 39] пропонувалося заміною  $\omega = \text{tg} z$  фінітизувати проміжок зміни аргументу характеристичного полінома на  $[0, \pi/2[$ , а для фінітизації діапазону зміни довжини радіуса – вектора  $r$  розглядати його орт  $r/r$ . Якщо взяти заміну  $\omega = \text{tg}(\pi/2z)$ , то проміжок для діапазону  $z$  буде  $[0; 1[$ . Для рівняння без запізнення це дасть годограф функції  $r(\varphi) = a_0\cos^n\varphi - a_2\cos^{n-2}\varphi * \sin^2\varphi + \dots + i\sin\varphi(a_1\cos^{n-1}\varphi - a_3\cos^{n-3}\varphi * \sin^2\varphi + \dots)$ ,  $\varphi = \pi/2z$ , якщо помножити на додатній множник  $\cos^n\varphi$ . Фактично, це вже дає фінітизацію критерія, бо як діапазон зміни аргументу  $z$ , так і довжина радіуса - вектора  $r(\varphi)$  скінчені.

Для системи ДР  $x' = Ax$  із сталою матрицею  $A$ , в ролі вектора  $r(\varphi)$  можна прийняти визначник  $\det(A\cos\varphi - iE\sin\varphi)$ . При цьому початковий крок можна вибрати порядку 1; якщо при зменшенні кроку вдвічі кут повороту радіуса – вектора суттєво не зміниться, то по його величині можна зробити висновок про стійкість. Для членів із запізненням множник  $\exp(-itg\varphi)$  має модуль 1, що не заважає фінітизації.

**5.2. Фінітизація критерія Михайлова.** Пізніше автор запропонував розглядати годограф, складений з двох дуг: перша відповідає проміжку  $\omega \in [0; 1]$ , а друга – напіввісі  $\omega \in (1; +\infty)$ . Для другої дуги пропонується заміна  $\omega = 1/z$ ,  $z \in (0; 1)$ . Для цієї другої дуги будемо радіус – вектор  $r_1 = z^n r$ . Скалярний множник зберігає кути (перетворення подібності з центром у точці  $O$ ), але фінітизує нескінчений розворот годографу типу спіралі. На жаль, при такій заміні для рівнянь із запізненням з'являються тригонометричні члени з

нескінченно зростаючим аргументом  $\tau/z$ . Але, наявність при них множників типу  $z^k$  дає границю 0 для них при  $z \rightarrow 0$ . Можна отримати й одне рівняння фінітизованого годографа заміною  $\omega = z/(1-z)$ .

Унаочнення – побудова фінітизованого годографу - не є необхідним. Кут повороту можна знаходити чисельно, розбивши проміжки  $[0; \Omega]$  для  $\omega$  ( $\Omega$ -достатньо велике число) та  $(0; 1)$  для  $z$  на достатньо малі частини й знаходити поворот годографа на кожній частині, додаючи ці повороти, поки не дійдемо до кінця. В разі нерівності для знайденої суми  $\Phi < n\pi/2$  необхідно повторити розрахунок, поділивши кожен крок навпіл. При наближеному збереженні цієї суми можна зробити висновок про нестійкість розв'язків. Похибка відношення  $m = 2\Phi/\pi$  може досягати 0.4. Такий алгоритм реалізовано в статтях [1,2,3]. В останні роки автор запропонував повну “алгебраїзацію” критерія, замінивши пошук суми частинних поворотів розв'язанням задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. При цьому не вимагається високої точності, бо для величини  $m = \Phi/(\pi/2)$  потрібно округлення до цілого значення  $m$ . При  $m = n$  рівняння *стійке*; при  $m < n$  – воно *нестійке*. Розроблені учнями автора програми тестовані і можуть використовуватися для синтезу систем, які описуються як звичайними ДР, так і ДРЗ.

**5.3. Пошук запасу стійкості систем ДР.** Факт стійкості може не задовольняти дослідника, особливо, коли він розв'язує задачу синтезу системи. Точно реалізувати фізичні (технічні) параметри системи нереально, а при малому запасі стійкості (коли відстань від уявної осі коренів характеристичного рівняння мала), не вдається гарантувати стійкість реальної системи. Запас стійкості можна оцінювати модулем найбільшої дійсної частини коренів характеристичного квазіполіному. Завдяки додатності всіх його коефіцієнтів максимум  $\text{Re } \lambda < -(a_0 + v_0)/(a_1 + v_1)$ . Ця оцінка може бути достатньо грубою; її можна уточнити, відшукавши перший справа дійсний корінь або першу справа пару комплексно – спряжених коренів за методикою, описаною в п. 4. Автором за допомогою учнів побудовані приклади, коли система, яка описується звичайними диференціальними рівняннями, стійка, але при заміні члена  $ay(t)$  на  $a_1y(t) + vy(t - \tau)$  при  $a = a_1 + v$  воно стає нестійким. На рис. 2 показані їх годографи.

### Висновки

1. Крім висвітлення відомих фактів та методів їх вивчення, автором запропоновано деякі нові підходи. Зокрема,

2. Пояснюється причина появи нескінченної множини комплексних коренів характеристичного полінома навіть при наявності одного елемента із затримкою передачі сигналу: процес стає хвильовим і його дискретний спектр стає нескінченим. Математично це відповідає розкладанню функції  $y(t - \tau)$  в нескінченний степеневий ряд по степенях  $\tau$  з коефіцієнтами – похідними в точці  $t$ .

3. Пропонуються чотири варіанти фінітизації критерія Михайлова, які можна використовувати як для побудови годографу, що унаочнює процес

установлення стійкості системи, так і для встановлення самого факту стійкості системи, яка описується як одним рівнянням високого порядку, так і системою лінійних автономних ДР.

4. Пропонується алгоритм знаходження комплексного кореня характеристичного квазіполіному, який використовує дійсні корені його похідної для отримання дійсної та уявної частин наближення для нього.

5. Пропонується метод оцінки запасу стійкості за допомогою знаходження дійсної частини найближчого до уявної осі кореня.

6. Наводиться приклад стійкої системи, яка при заміні одного з елементів сумою членів без запізнення та з запізненням із коефіцієнтами, сума яких зберігається, стає нестійким.

7. Матеріали статті можуть бути використані як у курсах фізики та технічних дисциплін, так і при вивченні курсу “Диференціальні рівняння”, де розглядаються відповідні питання (стійкості та аналізу систем із запізненнями), зокрема, у спецкурсі “Стійкість лінійних систем”, та в курсі “Системи автоматичного управління (регулювання)”.

\*\*\*

Автор вдячний своїм учням О. Дрозду, О. Дреєву, О. Донцю, О.Музиченку, без допомоги яких запропоновані ним алгоритми не були б реалізовані на сучасних ПЕОМ. Наведені рисунки були побудовані дипломником автора О.Донцем.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Филер З. Дрозд О. Критерий стійкості лінійних систем із запізненнями// // Всеукр. конф. «Диференц. – функціональні рівняння та їх застосування». Тези доп. – К.: Ін-т мат. НАН Укр., 1996. – С. 188.
2. Филер З.Е., Дрозд А.П. Реализация на ЭВМ критерия устойчивости Михайлова для линейных систем с запаздыванием// Науч. тр. Лётной Академии. Вып. 11, ч. 1. – Кировоград.: ГЛАУ, 1997. С. 198 – 2001.
3. Дрозд А.П., Филер З.Е. Критерий Михайлова устойчивости линейных систем с запаздываниями и его реализация на ЭВМ// Теория и системы управления. Изв. АН Рос.Федер., 1999, № 3. – С. 7 – 9.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
5. Кривицкий Б.Х. Задержка временная// В кн.: Физический энциклопедический словарь. Т. 2. – М.: Сов. Энциклоп., 1962. – С. 28.
6. Розов И.Х. Михайлова критерий// В кн.: Математическая энциклопедия. Т.3. – М.: Сов. Энциклоп., 1982. – С. 797-798.
7. Филер З.Е. Методические указания к изучению курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (для студентов специальности 0647 «Прикладная математика»). – Донецк: ДПИ, 1979. – 52 с.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 18 березня 2006 р.*

УДК 512+519.6.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

**З.П. Халецька , Л.В. Ізюмченко**

В роботі розглянуто застосування НІТ при вивченні класичного курсу вищої алгебри, зокрема, теорії многочленів над числовими полями.

The using of the new informative technology in the time of studying of the classical course of the high algebra in particular the theory of polynomial above number fields is considered.

Дана стаття має метою проілюструвати можливі підходи до розв'язування нелінійних рівнянь у різних курсах математичних дисциплін. У курсі математики студенти розв'язують алгебраїчні рівняння високих порядків, відшуковуючи раціональні корені чи дійсні, застосовуючи певні штучні прийоми. Їм пропонуються завдання, що охоплюють матеріал конкретних розділів „Алгебри і теорії чисел”, які необхідно розв'язувати алгебраїчними методами та комп'ютерними засобами, використовуючи програми з математичними середовищами. Наведемо один приклад, який може бути розглянутий як у курсах „Елементарної математики”, „Алгебри і теорії чисел”, так і у курсах „Чисельні методи” та „Інформатика”. Таким чином забезпечується наступність та взаємозв'язок у викладанні матеріалу. Пропонуємо варіант індивідуального завдання із зразком виконання.

**1.** Розв'язати рівняння:  $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = -7$ .

Розв'язання. Згрупуємо перший і останній та другий і третій множники. Маємо  $((x-1)(x-7)) \cdot ((x-3)(x-5)) = -7$  або  $(x^2 - 8x + 7) \cdot (x^2 - 8x + 15) = -7$ . Після заміни  $x^2 - 8x = t$  маємо:  $(t+7) \cdot (t+15) = -7$ , звідки  $t^2 + 22t + 112 = 0$ . За теоремою Вієта  $t_1 = -14$ ,  $t_2 = -8$ . Маємо сукупність рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 8x = -14, \\ x^2 - 8x = -8; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x-4)^2 = 2, \\ (x-4)^2 = 8; \end{cases} \text{ а тоді } \begin{cases} x_1 = 4 - \sqrt{2}, x_2 = 4 + \sqrt{2}; \\ x_3 = 4 - 2\sqrt{2}, x_4 = 4 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

**2.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112 = 0$  способом Феррарі.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат  $(x^2)^2 - 2x^2 \cdot 8x = -86x^2 + 176x - 112$ , а тоді  $(x^2 - 8x + \lambda)^2 = (-86x^2 + 176x - 112) + (64x^2 + \lambda^2 + 2\lambda x^2 - 16\lambda x)$ , або  $(x^2 - 8x + \lambda)^2 = x^2(-22 + 2\lambda) + x(176 - 16\lambda) + (-112 + \lambda^2)$ . Права частина має бути квадратом двочлена, для чого дискримінант має бути рівним нулю:  $\frac{\Delta}{4} = (88 - 8\lambda)^2 - (-22 + 2\lambda)(-112 + \lambda^2) = 0$  – маємо кубічну резольвенту. Один з розв'язків  $\lambda = 11$ . Тоді рівняння набуває вигляду  $(x^2 - 8x + 11)^2 = 9$ , або  $x^2 - 8x + 11 = \pm 3$ , його коренями є  $4 \pm 2\sqrt{2}$  та  $4 \pm \sqrt{2}$ .

**3.** Скласти ряд Штурма і відділити дійсні корені многочлена  $f(x) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112$ .

Розв'язання. Обчислимо похідну  $f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 172x - 176$ , маємо  $f_1(x) = x^3 - 12x^2 + 43x - 44$ . Так як  $f(x) = f_1(x) \cdot (x - 4) - (5x^2 - 40x + 64)$ , то  $f_2(x) = 5x^2 - 40x + 64$ . Продовжимо ділення:  $f_1(x) = f_2(x) \cdot (0,2x - 0,8) - 1,8(x - 4)$ , маємо:  $f_3(x) = x - 4$ . Так як  $f_2(x) = f_3(x) \cdot (5x - 20) - 16$ , то  $f_4(x) = 1$ . Ряд Штурма  $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ . Оцінимо кількість змін знаків цих многочленів:

$x$	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$W$
$-\infty$	+	-	+	-	+	4
$\infty$	+	+	+	+	+	0
1	+	-	+	-	+	4
2	-	+	+	-	+	3
3	+	+	-	-	+	2
5	+	-	-	+	+	2
6	-	-	+	+	+	1
7	+	+	+	+	+	0

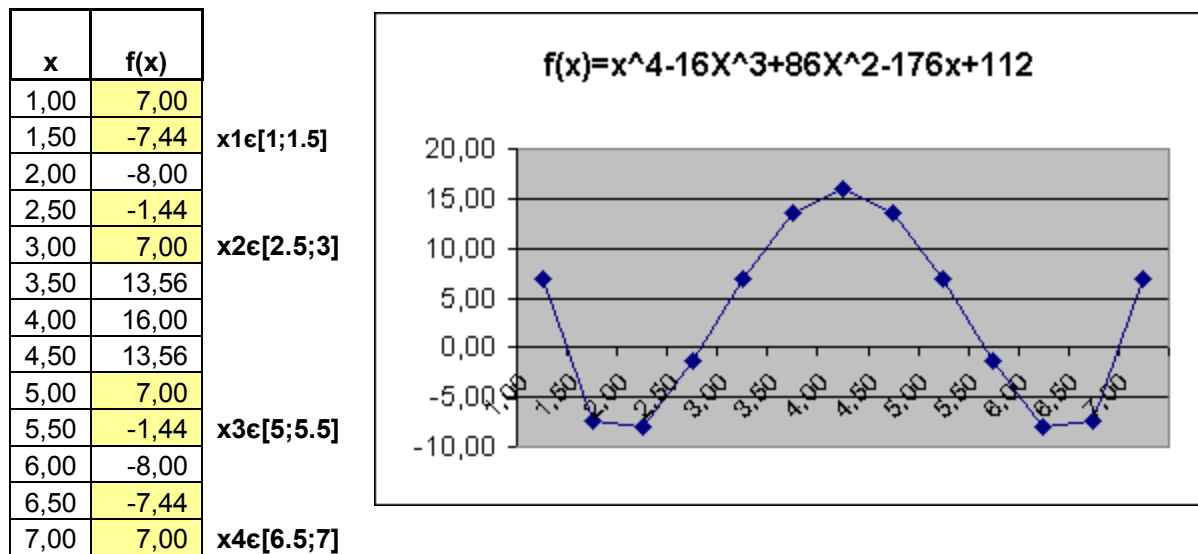
Так як  $W(-\infty) - W(\infty) = 4$ , то є чотири дійсні корені, причому  $x_1 \in (1; 2)$ ,  $x_2 \in (2; 3)$ ,  $x_3 \in (5; 6)$ ,  $x_4 \in (6; 7)$ .

**4.** Реалізувати знаходження наближених коренів многочлена  $f(x) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112$  та побудову його графіка, використовуючи обчислювальні можливості електронних таблиць Excel.

Розв'язання. Обчислювальні можливості електронних таблиць Excel дозволяють розв'язувати як прямі, так і „обернені” задачі: проводити дослідження області допустимих значень змінних, а також підбирати значення змінних для заданого значення многочлена.

Перший крок виконання завдання – введення значень змінних допустимого проміжку (1;7), в деякий діапазон, (наприклад – A3:A15) з певним кроком, наприклад (0,5). Для цього можна використати можливості автозаповнювання комірок: 1) в комірки A3, A4 вводимо відповідно числа: 1; 1,5; 2) виділяємо ці комірки і, сумістивши вказівку миші з маркером заповнення, „протягуємо” маркер до комірки A15. Другий крок – обчислення відповідних значень многочлена: 1) в комірку B3 вводимо формулу  $= A3^4 - 16 * A3^3 + 86 * A3^2 - 176 * A3 + 112$ , яка обчислює значення многочлена від значення комірки A3, тобто  $f(1)$  і натискаємо **Enter**; 2) копіюємо формулу комірки B3 в діапазон B3:B15. Третій крок – побудова наближеного графіку функції  $f(x) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112$  за його значеннями на проміжку (1;7). Для його виконання скористаємося майстром діаграм. Порядок побудови графіка: 1) виділяємо діапазон B3:B15; 2) виконуємо команди **Вставка, Діаграма** або натискаємо кнопку на панелі інструментів **Мастер діаграмм**; 3) в діалоговому вікні **Мастер діаграмм (шаг 1 из 4)** вибираємо тип діаграми – **Графік**; 4) в діалоговому вікні **Мастер діаграмм (шаг 2 из 4)** вибираємо закладку **Ряд** і вводимо в поле **подписи на оси X** діапазон значень A3:A15; 5) в діалоговому вікні **Мастер діаграмм (шаг 3 из 4)** вводимо назву графіка і назви координатних осей. При переході до

наступного вікна натискуємо кнопку **Далее**, а після останнього вікна – **Готово**.



Знайдемо наближені значення коренів многочлена використавши сервісну програму підбору параметру. Виберемо точки, що є кінцями відокремлених проміжків: 1,1; 2,5; 5,5; 7 та відповідні їм значення многочленів. Скопіюємо їх на вільне місце:

$x_1$	$f(x_1)$	$x_2$	$f(x_2)$	$x_3$	$f(x_3)$	$x_4$	$f(x_4)$
$x_1$	7,00	2,5	-1,44	5,50	-1,44	7,00	7,00

При встановленні курсору в комірку, що містить значення многочлена виконаємо команди: **Сервис, Подбор параметра**. З'явиться діалогове вікно, в якому задамо потрібне значення многочлена: 0. У полі „**Изменяя значение ячейки**” вказуємо адресу комірки, що містить значення точки, яка наближує корінь многочлена. Після натиснення **Ок** Excel розв'язує задачу підбору значення аргументу для заданого значення функції. У випадку успішного підбору виводиться вікно, в якому вказується результат – „**текущее значение**” многочлена для підбраного значення змінної. При натисненні **Ок** підбране значення – наближений корінь – зберігається в комірці аргументу. При натисненні кнопки **Отмена** відбувається відновлення значення аргументу. При неуспішному завершенні підбору параметру видається відповідне повідомлення про неможливість підбору аргументу. Виконаємо операцію підбору параметра для кожного з чотирьох коренів.

$x_1$	$f(x_1)$	$x_2$	$f(x_2)$	$x_3$	$f(x_3)$	$x_4$	$f(x_4)$
1,171566	0,00	2,585779	0,00	5,414215	0,00	6,828456	0,00

Таким чином, ми одержали наближені значення коренів многочлена: - 1,171566; 2,585779; 5,414215; 6,828456.

5. Обчислити аналітично суму кубів коренів рівняння  $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112 = 0$  та проілюструвати розв'язок засобами комп'ютерної алгебри.

Розв'язання.

Для розв'язання використаємо методи теорії симетричних многочленів.

Розглянемо симетричний многочлен  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ , значення якого від коренів рівняння і буде шуканою сумою; виразимо його через основні симетричні многочлени  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ .

Система показників для вищих членів буде така:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Звідки

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1^{3-0} \sigma_2^0 \sigma_3^0 \sigma_4^0 + A \sigma_1^{2-1} \sigma_2^{1-0} \sigma_3^{0-0} \sigma_4^0 + B \sigma_1^{1-1} \sigma_2^{1-1} \sigma_3^{1-0} \sigma_4^0 = \sigma_1^3 + A \sigma_1 \sigma_2 + B \sigma_3, \text{ де}$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$

$$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Покладемо  $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$ . Тоді  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$ ,  $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$ . Звідки  $2 = 8 + 2A$ ,  $A = -3$ .

Для визначення  $B$  покладемо  $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = 0$ . Тоді  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$ ,  $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$ . Звідки  $3 = 27 - 9 + B$ ,  $B = 3$ .

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Згідно з формулами Вієта, якщо  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  - корені заданого многочлена  $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112$ , то

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = -\frac{-16}{1} = 16,$$

$$\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{86}{1} = 86,$$

$$\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = -\frac{-176}{1} = 176,$$

$$\sigma_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{112}{1} = 112.$$

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3 = 16^3 - 3 \cdot 16 \cdot 86 + 3 \cdot 176 = 496.$$

Для ілюстрації застосуємо систему комп'ютерної алгебри Maple.

Використаємо бінарний оператор присвоєння  $:=$  та команду solve, яка надає можливість точно розв'язувати рівняння або систему рівнянь:

```
> z := x^4 - 16*x^3 + 86*x^2 - 176*x + 112;
```

$$z := x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112$$

```
> solve(z);
```

$$4 + 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}$$

```
> x1 := 4 + 2*sqrt(2);
```

$$x1 := 4 + 2\sqrt{2}$$

```
> x2 := 4-2*sqrt(2);
```

$$x2 := 4 - 2\sqrt{2}$$

```
> x3 := 4+sqrt(2);
```

$$x3 := 4 + \sqrt{2}$$

```
> x4 := 4-sqrt(2);
```

$$x4 := 4 - \sqrt{2}$$

Обчислимо потрібну суму кубів коренів за допомогою команди `simplify`, яка надає можливість перетворити, спростити вираз:

```
> x1^3+x2^3+x3^3+x4^3;
```

$$(4+2\sqrt{2})^3 + (4-2\sqrt{2})^3 + (4+\sqrt{2})^3 + (4-\sqrt{2})^3$$

```
> simplify(x1^3+x2^3+x3^3+x4^3);
```

496

Іноді необхідно отримати наближений результат, який не містить ірраціональностей, тоді доцільно використання команди `evalf`, яка перетворює результат у наближений із плаваючою комою. Представимо знайдені корені у вигляді десяткових чисел:

```
> x1:=evalf(4+2*sqrt(2));
```

$$x1 := 6.828427124$$

```
> x2:=evalf(4-2*sqrt(2));
```

$$x2 := 1.171572876$$

```
> x3:=evalf(4+sqrt(2));
```

$$x3 := 5.414213562$$

```
> x4:=evalf(4-sqrt(2));
```

$$x4 := 2.585786438$$

Для обчислення виразів з десятковими числами непотрібне використання оператора `simplify`, результат отримується після введення виразу:

```
> x1^3+x2^3+x3^3+x4^3;
```

495.9999999

У курсі „Чисельні методи” є можливість розв’язати ту ж саму задачу: знаходження та уточнення коренів. Ми проілюстрували це методом простої ітерації, методом поділу відрізка навпіл (дихотомії), методом хорд та дотичних.

Метод простої ітерації		
$x = \varphi(x)$		
$\varphi(x) = 0,5^*(0,5*x^4+43*x^2-88*x+56)^(1/3)$		
i	x	$\varphi(x)$
1	1,0000000	1,1285894
2	1,1285894	1,1530796
3	1,1530796	1,1630333
4	1,1630333	1,1675229
5	1,1675229	1,1696295
6	1,1696295	1,1706353
7	1,1706353	1,1711194
8	1,1711194	1,1713533
9	1,1713533	1,1714665
10	1,1714665	1,1715213

Метод хорд		
$x(i+1)=(c*f(x(i))-f(c)*x(i))/(f(x(i))-f(c))$		
Нерухома точка c=1		
Початкове наближ x0=1,5		
i	x	f(x)
1	0,000000000	112,000000000
2	1,171572869	0,000000203
3	1,171572875	0,000000000
4	1,171572875	0,000000000
5	1,171572875	0,000000000
6	1,171572875	0,000000000
7	1,171572875	0,000000000
8	1,171572875	0,000000000
9	1,171572875	0,000000000
10	1,171572875	0,000000000

12	1,1715479	1,1715608
13	1,1715608	1,1715670
14	1,1715670	1,1715700

$$x_1 = 1,17157 \pm 0,000005$$

$$x_1 = 1,171572875 \pm 0,000000005$$

Методі дихотомії				
$f(x) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 112$				
x	f(x)		Довж. відр.	$\varepsilon = 0,01$
1,0000000	7,00000000			
1,5000000	-7,43750000	$x \in [1; 1.5]$	0,5000	> 0,01
1,2500000	-2,43359375	$x \in [1; 1.25]$	0,2500	> 0,01
1,1250000	1,66430664	$x \in [1.125; 1.25]$	0,1250	> 0,01
1,1875000	-0,53099060	$x \in [1.125; 1.1875]$	0,0625	> 0,01
1,1562500	0,52903843	$x \in [1.15625; 1.1875]$	0,0313	> 0,01
1,1718750	-0,01025099	$x \in [1.15625; 1.171875]$	0,0156	> 0,01
1,1640625	0,25705880	$x \in [1.164063; 1.171875]$	0,0078	< 0,01

$$x = 1,16796875 \pm 0,003906$$

$$\text{або } x = 1,168 \pm 0,005$$

Метод Ньютона					
i	x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Примітка
0	1,00	7,00	-48,00	88,00	$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$
	1,50	-7,44	-12,50	55,00	отже, $x_0 = 1$

Модифікація методу Ньютона			
i	x	f(x)	f'(x <sub>0</sub> )
0	1,00000000	7,00000000	-48,00000000
1	1,14583333	0,89899831	
2	1,16456246	0,23981267	
3	1,16955856	0,06852234	
4	1,17098611	0,01992854	
5	1,17140129	0,00582497	
6	1,17152264	0,00170507	
7	1,17155816	0,00049932	
8	1,17156857	0,00014624	
9	1,17157161	0,00004283	
10	1,17157251	0,00001255	
11	1,17157277	0,00000367	
12	1,17157284	0,00000108	
13	1,17157287	0,00000032	

$$x(i+1) = x(i) - f(x(i)) / f'(x_0)$$

$$x = 1,1715729 \pm 0,0000005$$

Метод Ньютона			
i	x	f(x)	f'(x)
0	1,000000000	7,000000000	-48,00000000
1	1,145833333	0,8989983076	-35,91988571
2	1,170861205	0,0241741226	-33,99522959
3	1,171572309	0,0000192235	-33,94116854
4	1,171572875	0,000000000	-33,94112550
5	1,171572875	0,000000000	

$$x(i+1) = x(i) - f(x(i)) / f'(x(i))$$

$$x = 1,171572875 \pm 0,00000005$$

Звичайно, у курсі „Чисельні методи” можна розв’язувати не тільки алгебраїчні, а й трансцендентні рівняння, але не треба відмовлятися у індивідуальних завданнях і від алгебраїчних рівнянь високих степенів. Це дає можливість пов’язати знання студентів з курсів „Елементарна математика”, „Алгебра і теорія чисел”, „Чисельні методи” та „Інформатика”.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 6 березня 2006 р.*

УДК 512.552.1

## НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ТА ЇХ САГАЙДАКИ

Ю.В. Яременко, О.О. Тархова

Вказано метод побудови напівдосконалих кілець за їх сагайдаками.

This is proved the method of construction the semiperfect rings by the quivers.

Розглядаються асоціативні кільця з одиницею.

**Твердження 1 [6, с.9]** . Якщо  $1=e_1+\dots+e_n$ -розклад одиниці кільця  $A$  , то
$$A = \bigoplus_{i=1}^n e_i A \quad (A = \bigoplus_{i=1}^n A e_i) - \text{розклад кільця } A \text{ в пряму суму правих (лівих) ідеалів } e_i A \text{ (} A e_i \text{)}.$$
Нехай  $1=e_1+\dots+e_n$  – розклад одиниці кільця  $A$  і
$$a=1a1==(e_1+\dots+e_n)a(e_1+\dots+e_n)=\sum_{i,j=1}^n e_i a e_j. \text{ Елементи із } e_i A e_j \text{ ми будемо}$$

позначати через  $a_{ij}$ . Тоді будь-який елемент  $a \in A$  зручно записувати у вигляді матриці  $(a_{ij})$ . Кільце  $A$  зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із  $A_{ij}=e_i A e_j$  з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця  $A$*  [7, с.31]

Модуль  $A$  називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів є лінійно впорядкованою.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем*.

Кільце  $A$  називається *напівланцюговим*, якщо воно є напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

*Ідемпотенти можна піднімати за модулем  $R$* , якщо для будь-якого елемента  $u \in A$  , для якого  $u^2 - u \in R$  існує елемент  $e^2 = e \in A$  такий, що  $e - u \in R$  (тобто існує ідемпотент в кільці  $A$  конгруентний з  $u$  за модулем  $R$ ).

Напівлокальне кільце  $A$  називається *напівдосконалим*, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона  $R$  кільця  $A$  [2, с.120].

Нерозкладний модуль  $M$  називається *бірідним*, якщо він (тобто структура його підмодулів) дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі  $K_1$  і  $K_2$  (можливо й рівні нулю) такі, що  $K_1+K_2 \in M$ , або найбільший власний підмодуль в  $M$ , а  $K_1 \cap K_2 \in$  нуль або найменший ненульовий підмодуль в  $M$  [3].

Напівдосконале кільце  $A$  називається *бірідним*, якщо кожний правий і кожний лівий головний  $A$ -модуль бірідний [3].

**Теорема 1.** *Якщо  $A$  є зведеним бірідним кільцем з двостороннім пірсовським розкладом  $A=(a_{ij})$ , відносно розкладу  $1 \in A$  в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, то  $A_{ii}$  – ланцюгові кільця ( $i=1, \dots, n$ ), а*

$A_{ij}(i \neq j)$  являється ланцюговим лівим  $A_{ii}$ -модулем і ланцюговим правим  $A_{jj}$ -модулем ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

При побудові сагайдаків таких кілець будемо використовувати теорему:

**Теорема 2 [4].** Нехай  $A$  – нетерове бірядне кільце. Тоді з кожної точки сагайдака кільця  $A$  виходить не більше двох стрілок і в кожну точку сагайдака кільця  $A$  входить не більше двох стрілок, причому з однієї точки в іншу (можливо збіжну з вихідною) йде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, що задовольняє цим умовам, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.

**Лема 1.** Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.

**Д о в е д е н н я.** Нехай  $P$  – головний модуль, що відповідає точці, вказаній у формулюванні леми. Тоді  $PR/PR^2 = U$ , де  $U$  – простий модуль. За означенням бірядного кільця  $PR = K_1 + K_2$ , де  $K_1$  і  $K_2$  – ланцюгові модулі (можливо нульові) такі, що  $K_1 \cap K_2$  – або нуль, або найменший підмодуль в  $PR$ . Якщо обидва модулі  $K_1$  і  $K_2$  відрізняються від нуля, то  $PR/PR^2$  не може бути простим модулем. Тому  $PR$ , а значить, і  $P$  – ланцюговий модуль.

**Лема 2.** Нехай  $R$  – радикал Джекобсона локального кільця  $O$ ,  $X$  – ланцюговий  $O$ -модуль і включення  $XR \subset X$  строге. Тоді  $X$  – циклічний  $O$ -модуль.

**Лема 3 [1].** Простий модуль  $U_k$  ( $V_k$ ) входить в прямий розклад модуля  $e_i R / e_i R^2$  ( $R e_i / R^2 e_i$ ) тоді і тільки тоді, коли  $e_i R^2 e_k$  ( $e_k R^2 e_i$ ) строго міститься в  $e_i R e_k$  ( $e_k R e_i$ ).

**Лема 4 [6, с.47].** Мають місце рівності  $U_i e_j = 0$ ,  $e_j V_i = 0$  при  $i \neq j$  і  $U_i e_i = U_i$ ,  $e_i V_i = V_i$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

**Твердження 2 [4].** Для нетерових кілець єдиний правий максимальний  $A_{jj}$  – підмодуль в  $A_{ij}$  співпадає з єдиним лівим максимальним  $A_{ii}$  – підмодулем в  $A_{ij}$ .

### Приклад 1.

Вказати вигляд напівдосконалого кільця  $A$ , яке має сагайдак  $K(A)$ :



Оскільки цей сагайдак складається з двох точок, то двосторонній пірсонський розклад кільця  $A$  має вигляд 
$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & X \\ Y & \mathfrak{G}_2 \end{pmatrix}.$$

Так як із точки 1 виходить одна стрілка, то правий головний  $A$ -модуль  $P_1 = e_1 A$  – ланцюговий, отже маємо строге включення  $R_1 X \subset X$ , звідки за критерієм напівдистрибутивності напівдосконалого кільця і лемою 2  $X$  – лівий циклічний  $A_1$ -модуль. Точно так же доводиться, що  $Y$  – лівий циклічний  $A_2$ -модуль, звідки за теоремою 10.5 [6] кільце  $A$  нетерове зліва. В силу [1] у

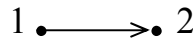
цьому випадку  $A$  – нетерове з двох сторін напівланцюгове кільце. Якщо цю кільця  $A$  дорівнює нулю, то це кільце ізоморфне кільцю  $H_2(O)$ , де  $O$  – дискретно нормоване кільце з єдиним максимальним ідеалом  $M$ :

$$H_2(O) = \begin{pmatrix} O & O \\ M & O \end{pmatrix}.$$

Кільце  $H_2(O)$  – спадкове первинне кільце.

**Приклад 2.**

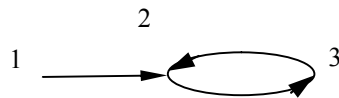
Вказати вигляд напівдосконалого кільця  $A$ , яке має сагайдак  $K(A)$ :



Так як із точки 2 не виходить стрілка, то правий головний  $A$ -модуль  $P_1$  – простий, отже маємо  $Y = 0, R_2 = 0, YX = R_1 = 0$ . Легко бачити, що в цьому випадку кільце  $A$  ізоморфне кільцю  $T_2(D)$  верхніх трикутних матриць другого порядку над тілом  $D$ . Кільце  $T_2(D)$  – це артинове спадкове напівланцюгове кільце.

**Приклад 3.**

Знайти вигляд нетерового напівдосконалого кільця  $A$ , яке має сагайдак  $K(A)$ :



Двосторонній пірсовський розклад напівдосконалого кільця, сагайдак

якого складається з трьох точок, має вигляд  $A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}$ , а його

радикал Джекобсона  $R = \begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & R_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & R_3 \end{pmatrix}$ , де  $R_i$  – радикал Джекобсона

кільця  $\mathfrak{G}_i = e_i A e_i, (i = 1, 2, 3)$ .

Скористаємося тим, що сагайдак  $K(A) = K(A/R^2)$  [6, с.46].

Так як у вершину 1 не входить стрілка, то лівий модуль  $Q_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}$  –

простий, тому  $A_{21} = 0, A_{31} = 0, \mathfrak{G}_1 = D_1$  – тіло. У вершинах 2 і 3 немає петель, тому  $R_2 = A_{23}A_{32}$  і  $R_3 = A_{32}A_{23}$ . За лемою 1 лівий модуль

$$Q_3 = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix} \text{ – ланцюговий. Знайдемо } R^2 Q_3 = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} R_3 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad R^3 Q_3 = \begin{pmatrix} A_{13} R_3 \\ A_{23} R_3 \\ R_3^2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кільце  $A$  – нетерове, то за лемою Накаями циклічний бімодуль  $A_{13}$  строго включає в себе підмодуль  $A_{13}R_3 = R_1 A_{13}$ , а радикал  $R_3$  строго включає в себе  $R_3^2$ . Тому, якщо  $A_{13} \neq 0$  і  $R_3 \neq 0$ , то згідно лем 3 і 4  $R^2 Q_3 / R^3 Q_3 = u_1 + u_3$ , що суперечить тому, що  $Q_3$ - ланцюговий. Отже,  $A_{13} = 0$ , або  $R_3 = 0$ . Таким чином кільце  $A$  з розглядуваним сагайдаком ізоморфне кільцю:

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

- 1)  $R_2 = A_{23} A_{32}$ , 2)  $R_3 = A_{32} A_{23}$ , 3)  $A_{13} = 0$ , або  $R_3 = 0$ .

Легко перевірити, що кільце  $A$  з отриманими умовами являється бірядним (модуль  $Q_2$  – бірядний). Згідно теореми 10.5 [6] і теореми 6.1 [8]  $\mathfrak{G}_2$  і  $\mathfrak{G}_3$  дискретно нормовані кільця (локальні області головних лівих і головних правих ідеалів), або однорядні кільця Кете (ланцюгові артинові кільця).  $A_{12}$  – одновимірний лівий  $D_1$  – простір і одновимірний правий  $\mathfrak{G}_2 / R_2$  – простір,  $A_{13}$  – одновимірний лівий  $D_1$  – простір і одновимірний правий  $\mathfrak{G}_3 / R_3$  – простір,  $A_{23}$  – одновимірний лівий  $\mathfrak{G}_2 / R_2$  – простір і одновимірний правий  $\mathfrak{G}_3 / R_3$  – простір,  $A_{32}$  – одновимірний лівий  $\mathfrak{G}_3 / R_3$  – простір і одновимірний правий  $\mathfrak{G}_2 / R_2$  – простір.

**Приклад 4.**

Вказати вигляд нетерового напівдосконалого кільця  $A$ , яке має сагайдак  $K(A)$ :



Двосторонній пірсівський розклад будь-якого напівдосконалого кільця, сагайдак якого складається з 4-х точок має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{G}_3 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \mathfrak{G}_4 \end{pmatrix}.$$

Але, так як в точку 2 сагайдака розглядуваного кільця не входить стрілка, то

$$\text{лівий модуль, який відповідає цій точці } Q_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ \mathfrak{G}_2 \\ A_{32} \\ A_{42} \end{pmatrix} - \text{простий} \Rightarrow A_{12} =$$

$A_{32} = A_{42} = 0$  і  $\mathfrak{G}_2 = D_2$  – тіло. Так як з точки 2 в точку 1 немає шляху, то  $A_{21} = 0$ . Аналогічно, з точки 3 в точку 1 немає шляху і з точки 4 в точку 1 немає шляху, отже,  $A_{31} = A_{41} = 0$ . Таким чином отримали кільце:

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & D_2 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}_3 & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & \mathfrak{G}_4 \end{pmatrix},$$

Оскільки сагайдак  $K(A) = K(A/R_2)$  [6, с.46] і  $A_{14}$  – циклічний бімодуль, то за лемою Накаями  $A_{14} \supset A_{14}R_4$ . З точки 1 в точку 4 немає стрілки тому  $A_{14}/A_{14}R_4 + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34} = 0$ . Отже,  $A_{14} = A_{13}A_{34}$ . Аналогічно  $A_{23} = A_{24}A_{43}$ .

$$R_3/R_3^2 + A_{34}A_{43} = 0, \text{ тому } R_3 = A_{34}A_{43}. \quad R_4/A_{43}A_{34} + R_4^2 = 0, \text{ тому } R_4 =$$

$$A_{43}A_{34}. \text{ Розглянемо головний лівий модуль } Q_4 = \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \\ \mathfrak{G}_4 \end{pmatrix}. \text{ У точку 4 входять дві}$$

стрілки, отже,  $Q_4$  – бірядний модуль. Так як  $RQ_4 = K_1 + K_2$ , де  $K_1$  і  $K_2$  – ланцюгові модулі, то  $e_1K_1 + e_1K_2 = A_{14}$ ,  $e_2K_1 + e_2K_2 = A_{24}$ ,  $e_3K_1 + e_3K_2 = A_{34}$ , і  $e_4K_1 + e_4K_2 = R_4$ . Враховуючи, що  $A_{14}$ ,  $A_{24}$ ,  $A_{34}$  – ланцюгові бімодулі, а  $R_4$  – ланцюговий  $\mathfrak{G}_4$  – модуль, отримаємо:

$$M = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & O & A_{13} & A_{14} \\ O & D_2 & A_{23} & A_{24} \\ O & O & \mathfrak{G}_3 & A_{34} \\ O & O & A_{43} & \mathfrak{G}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O \\ O \\ A_{34} \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{23}A_{34} \\ A_{34} \\ R_4 \end{pmatrix} \subseteq K_1.$$

$$RM = \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{23}A_{34} \\ A_{34}R_4 \\ R_4 \end{pmatrix}, \quad R^2M = \begin{pmatrix} A_{14}R_4 \\ A_{23}A_{34} \\ A_{34}R_4 \\ R_4^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо  $A_{14} \neq 0$  і  $R_4 \neq 0$ , то за лемами 3 та 4  $RM/R^2M = U_1 + U_2$ , що суперечить тому, що  $M$  – ланцюговий модуль. Отже,  $A_{14} = 0$  або  $R_4 = 0$ .

Аналогічно, розглянувши бірядний лівий модуль  $Q_3$  і його ланцюговий підмодуль

$$L = A \cdot \begin{pmatrix} O \\ O \\ O \\ A_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23} \\ R_3 \\ A_{43} \end{pmatrix}, \quad RL = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23} \\ R_3 \\ A_{43}R_3 \end{pmatrix}, \quad R^2L = \begin{pmatrix} A_{13}R_3 \\ A_{23}R_3 \\ R_3^2 \\ A_{43}R_3 \end{pmatrix},$$

отримаємо, що  $A_{23} = 0$  або  $R_3 = 0$ .

Отже, шукане кільце є бірядним кільцем, яке має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & O & A_{13} & A_{14} \\ O & D_2 & A_{23} & A_{24} \\ O & O & \mathfrak{G}_3 & A_{34} \\ O & O & A_{43} & \mathfrak{G}_4 \end{pmatrix}, \quad \text{де } D_2 \text{ – тіло, } \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3 \text{ і } \mathfrak{G}_4 \text{ – дискретно нормовані}$$

кільця (локальні області головних лівих і головних правих ідеалів), або однорядні кільця Кете (ланцюгові артинові кільця) і

- 1)  $A_{14} = A_{13}A_{34}$ . 2)  $A_{23} = A_{24}A_{43}$ . 3)  $R_3 = A_{34}A_{43}$ . 4)  $R_4 = A_{43}A_{34}$ .
- 5)  $A_{14} = 0$  або  $R_4 = 0$ . 6)  $A_{23} = 0$  або  $R_3 = 0$ .

В наступному прикладі нам будуть потрібними наступні поняття:

Нерозкладний модуль  $M$  називається  $n$ -рядним [5], якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі  $K_1, \dots, K_n$  (можливо і нульові) такі, що  $K_1 + \dots + K_n \in M$ , або найбільший власний підмодуль в  $M$ , а  $K_i \cap K_j, i \neq j$ , – нуль або простий модуль.

Напівдосконале кільце  $A$  будемо називати  $n$ -рядним, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий  $A$ -модуль є  $n$ -рядним [5].

Зрозуміло, що при  $n = 1$  ми отримаємо напівланцюгові кільця, а при  $n = 2$  – бірядні кільця.

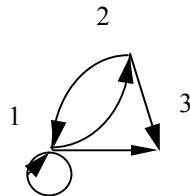
**Теорема 3 [5].** Якщо кільце  $A$  багаторядне справа (зліва),  $e$  – ненульовий ідемпотент кільця  $A$ , то кільце  $eAe$  багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце  $A$  багаторядне, то й кільце  $eAe$  багаторядне.

**Теорема 4 [5].** Локальне багаторядне кільце  $A$  є ланцюговим.

**Теорема.5 [5].** Нехай  $A$  – нетерове  $n$ -рядне кільце. Тоді з будь-якої точки сагайдака кільця  $A$  виходить не більше  $n$  стрілок і в будь-яку точку сагайдака кільця  $A$  входить не більше  $n$  стрілок, причому з однієї точки в іншу (можливо, співпадаючу з вихідною) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінчений граф, що задовольняє цим умовам, то існує  $n$ -рядне кільце, сагайдаком якого є цей граф.

**Приклад 5.**

Вказати вигляд нетерового напівдосконалого кільця  $A$ , яке має сагайдак  $K(A)$ :



Двосторонній пірсовський розклад кільця, сагайдак якого складається з трьох точок, має вигляд: 
$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \mathfrak{G}_3 \end{pmatrix}.$$

Так як з вершини 3 не виходить стрілка, то модуль  $P_3 = (A_{31} \ A_{32} \ \mathfrak{G}_3)$  – простий, тому  $A_{31} = 0$ ,  $A_{32} = 0$ ,  $\mathfrak{G}_3 = D_3$  – тіло. Радикал Джекобсона тіла рівний нулю, тому  $R_3 = 0$ .

Отже, в даному прикладі маємо кільце

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ з радикалом Джекобсона } R = \begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & R_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + A_{12}A_{21} & R_1A_{12} & R_1A_{13} + A_{12}A_{23} \\ R_2A_{21} & A_{21}A_{12} + R_2^2 & A_{21}A_{13} + R_2A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як у вершині 2 немає петлі і сагайдак  $K(A) = K(A/R^2)$ , то  $R_2 = A_{21}A_{12}$ . Оскільки кільце  $A$  – нетерове, то за твердженням 2  $R_2A_{23} = A_{23}R_3 = 0$  (так як  $R_3 = 0$ ). Крім того за лемою Накаями циклічний бімодуль  $A_{23}$  строго включає

в себе підмодуль  $R_2A_{23}$  і  $A_{23}$  строго включає в себе підмодуль  $A_{21}A_{13}$  (так як із точки 2 в точку 3 йде стрілка), отже,  $A_{21}A_{13} = 0$ .

Аналогічно,  $A_{13}R_3 = R_1A_{13} = 0$  і  $A_{13} \supset A_{12}A_{23}$ , тому  $A_{12}A_{23} = 0$ .

З точки 2 виходять дві стрілки, отже модуль  $P_2 = (A_{21} \ \mathfrak{G}_2 \ A_{23})$  – бірядний. З точки 1 виходять три стрілки, тому модуль  $P_1 = (\mathfrak{G}_1 \ A_{12} \ A_{13})$  –  $n$ -рядний ( $n=3$ ).

Отже, отримали нетерове багаторядне кільце, яке ізоморфне кільцю:

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \mathfrak{G}_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } D_3 - \text{тіло, } \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, - \text{дискретно нормовані}$$

кільця (локальні області головних лівих і головних правих ідеалів), або однорядні кільця Кете (ланцюгові артинові кільця) і виконуються умови:

$$1) R_2 = A_{21}A_{12}, \quad 2) A_{12}A_{23} = 0, \quad 3) A_{21}A_{13} = 0.$$

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
2. Bass Н. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
3. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
4. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.
5. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.
6. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
7. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
8. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // К., 1975. – 58 с. – (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).

Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 9 лютого 2006 р.

## **Зміст**

<b>О. В. Авраменко, Ф. М. Олійник. МОДЕЛЮВАННЯ ГЕНЕРАЦІЇ ХВИЛІ ЦУНАМІ, УТВОРЕНОЇ ЗСУВОМ ВИКРИВЛЕНОГО ДНА .....</b>	<b>3</b>
<b>В. В. Аулін, Б.С. Дігтяр, Н.М. Цвігун. ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ФІНАНСОВОГО МЕХАНІЗМУ .....</b>	<b>8</b>
<b>В.М. Бобочко , С.С. Костигін. ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ.....</b>	<b>ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.</b>
<b>В.М. Бобочко , І.О. Зеленська. ОДНОРІДНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З СТАБІЛЬНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ .....</b>	<b>24</b>
<b>Ю.И. Волков , О.Ю. Волкова. P-НОРМАЛИЗОВАННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ .....</b>	<b>33</b>
<b>П. Н. Денисенко. ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ЯДРАМИ ТИПА ФУНКЦИИ ГРИНА .....</b>	<b>38</b>
<b>О.М. Дреєв , З.Ю. Філер. АПРОКСИМАЦІЯ ТА ПРОГНОЗ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....</b>	<b>50</b>
<b>Л.О.Дундученко. ІНТЕГРАЛ ШВАРЦА ДЛЯ ЗЧИСЛЕННО-ЗВ'ЯЗНОЇ КРУГОВОЇ ОБЛАСТІ.....</b>	<b>57</b>
<b>В.М. Євладенко , Л.В. Євладенко , Ю.П. Пігарьов. ПРО ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН .....</b>	<b>61</b>
<b>В.М. Євладенко, Ю.П. Пігарьов. ДЕЯКІ ПИТАННЯ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН.....</b>	<b>67</b>
<b>С.Т. Кузнецов, Н.В. Столярчук, Т.Ф. Шмелёва. К ВОПРОСУ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБРАБОТКИ ЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ .....</b>	<b>70</b>
<b>В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, В.В. Кравченко. ВИЗНАЧЕННЯ ВИГЛЯДУ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ЕКОНОМІЧНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ ШЛЯХОМ.....</b>	<b>76</b>
<b>О.П. Макаручук. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЄНСЕНА МЕТОДОМ ШТУРМА.....</b>	<b>83</b>
<b>Л.П. Петренюк, А.Я.Петренюк. ПРО ІСНУВАННЯ КУБІЧНИХ РОЗКЛАДІВ ГРАФУ <math>K_{10}</math> ТИПУ 2011 .....</b>	<b>85</b>
<b>В.А. Романов. ПРЕДЕЛЫ ВЕКТОРНЫХ МЕР В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ .....</b>	<b>95</b>
<b>З.Ю. Філер. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМИ .....</b>	<b>99</b>
<b>З.П. Халецька , Л.В. Ізюмченко. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ .....</b>	<b>107</b>
<b>Ю.В. Яременко, О.О. Тархова. НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ТА ЇХ САГАЙДАКИ... </b>	<b>114</b>

# **НАУКОВІ ЗАПИСКИ**

**Випуск 65**

*Серія:*

***МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ***

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ  
ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ,  
ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ  
Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 10.04.2006. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офсет. Друк різнограф.  
Ум. др. арк. 5,26. Тираж 300. Зам. № 4318.

---

**РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ**  
*Кіровоградського державного педагогічного*  
*університету імені Володимира Винниченка*  
*25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1*  
*Тел.: (0522) 24-59-84.*  
*Fax.: (0522) 24-85-44.*  
*E-Mail: [mails@kspu.kr.ua](mailto:mails@kspu.kr.ua)*