УДК 378.147:519.21:378.6:63

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ГРАНИЧНИХ ТЕОРЕМ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В АГРАРНИХ ВНЗ

Леонід Флегантов, Юлія Овсієнко
Полтавська державна аграрна академія
(Полтава)

Анотація. Стаття присвячена методичним особливостям обґрунтування переходу від вивчення теорії ймовірностей до математичної статистики в процесі підготовки студентів економічних спеціальностей в аграрних ВНЗ. Зроблено акцент на поєднанні принципів науковості і доступності, демонстрації прикладної спрямованості, теоретичного і практичного значення граничних теорем теорії ймовірностей та їх ролі у фаховій підготовці майбутніх економістів для сфери аграрного виробництва.

***Ключові слова**: економічні спеціальності, аграрні ВНЗ, методика навчання, теорія ймовірностей, математична статистика, граничні теореми, закон великих чисел.*

Постановка проблеми. Проблема, якій присвячене дане дослідження, зумовлена об’єктивно існуючими протиріччями між вимогами до фахових компетентностей випускників економічних спеціальностей вищих аграрних навчальних закладів (ВАНЗ) і низьким рівнем їх математичної компетентності, що може бути пояснений як варіативністю інтересів, нахилів, здібностей студентів, відсутністю особистісної орієнтації змісту й форм організації навчання математичних дисциплін, так і лише частковою розробленістю методики їх навчання. Зокрема, це стосується й дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» (ТЙМС), передбаченої навчальними планами підготовки здобувачів вищої освіти галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» у ВАНЗ.

Граничні теореми теорії ймовірностей (ГТ) – традиційно одна з найбільш складних для опанування студентами тем дисципліни ТЙМС. Роль цієї теми у складі дисципліни зумовлена її теоретичним і практичним значенням: ГТ дозволяють обґрунтувати перехід від вивчення теорії ймовірностей до математичної статистики, що є важливим для фахової підготовки економістів-аграріїв, а також надають можливість розуміти і будувати стохастичні моделі, розв'язувати математичними методами численні практичні задачі економічного змісту.

Результати цього дослідження ґрунтуються на матеріалах, пов'язаних із підготовкою студентів у галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030507 «Маркетинг», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030509 «Облік і аудит» (згідно Переліку 2006-2012 [5]. Останнім часом, у нормативній базі освітньої діяльності ВНЗ відбулися зміни: наказом МОНУ [4] затверджено новий перелік галузей знань та відповідних спеціальностей. Згідно таблиці відповідності у додатку до цього наказу, зазначеним вище напрямам підготовки відповідають спеціальності 051 «Економіка» з галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» та спеціальності 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 075 «Маркетинг» і 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» з галузі знань 07 «Управління та адміністрування» згідно Переліку 2015 [1]. Тому, викладене далі не втрачає актуальності, оскільки вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики передбачено наразі у складі дисципліни «Вища та прикладна математика», що є обов'язковою для вказаних спеціальностей.

Аналіз актуальних досліджень. Питання дослідження методики навчання дисципліни ТЙМС у вищих навчальних закладах (ВНЗ) не є новим. Традиційна практика викладання дисципліни ТЙМС у ВАНЗ ґрунтується, в основному, на фундаментальних працях, підручниках і посібниках Б. В. Гнєденка, В. Є. Гмурмана, О. С. Вентцель, А. М. Колмогорова, Д. Пойа, а також методичних ідеях, реалізованих в роботах А. Т. Мармози, А. Т. Опрі, В. Феллера та інших.

Проблеми навчання основам ТЙМС тісно пов'язані з питаннями прикладної спрямованості математичних (фундаментальних, природничонаукових) дисциплін. У цьому напрямку працювали: В. І. Болтянський, Я. С. Бродський, Ю. І. Волков, О. М. Коломієць, Д. В. Маневич, Л. І. Новицька, З. І. Слєпкань, А. А. Столяр, О. В. Трунова, В. О. Швець, М. І. Шкіль, М. Й. Ядренко та інші.

Аналіз науково-методичної літератури з питань навчання вищої математики, теорії ймовірностей і математичної статистики, програм навчальних дисциплін, підручників і посібників, що мають зв'язок із дисципліною ТЙМС у ВАНЗ, з'ясування дидактичної структури занять із дисципліни ТЙМС, свідчить, що ГТ у ВАНЗ, у більшості випадків, викладаються формально, зокрема, без опори на стохастичний експеримент, демонстрації їх прикладної спрямованості, зв'язку з іншими навчальними дисциплінами, а також перспектив їх подальшого застосування під час вивчення фахових дисциплін.

Таким чином, незважаючи на значну кількість досліджень і публікацій, проблеми навчання дисципліні ТЙМС у ВАНЗ потребують подальшого вивчення.

Мета статті полягає у представленні методичних особливостей обґрунтування переходу від вивчення основ теорії ймовірностей до математичної статистики в процесі підготовки здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей у ВАНЗ.

Методи дослідження: аналіз наукової і методичної літератури з питань навчання основ теорії ймовірностей і математичної статистики здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей; аналіз програм навчальних дисциплін, підручників, посібників, що мають зв'язок із дисципліною ТЙМС у ВАНЗ; з'ясування дидактичної структури занять із дисципліни ТЙМС; узагальнення і систематизація результатів навчання дисципліні ТЙМС майбутніх економістів.

Виклад основного матеріалу. Згідно вимог навчальних програм і логіки дисципліни ТЙМС, перехід від навчання теорії ймовірностей до математичної статистики здійснюється під час вивчення граничних теорем теорії ймовірностей. Таким чином, ця тема є завершальною у розділі «Теорія ймовірностей» у складі дисципліни ТЙМС. До початку її вивчення студенти мають повністю засвоїти поняття: ймовірність події, відносна частота події, випадкова величина, закон розподілу випадкової величини, числові характеристики випадкових величин, нормальний закон розподілу.

На початку вивчення ГТ слід наголосити на тому, що вони встановлюють зв'язок між теоретичними й експериментальними характеристиками випадкових величин (в. в.) при великій кількості випробувань, і тому є теоретичною основою математичної статистики, що вивчатиметься далі. Важливо вчасно акцентувати увагу студентів на тому, що ГТ умовно поділяють на дві групи: перша група має загальну назву закону великих чисел (ЗВЧ). Його теоретичне і практичне значення полягає в тому, що ЗВЧ встановлює стійкість середніх значень в. в., що на практиці означає: при великій кількості випробувань, результат випробування перестає бути випадковим і може бути передбачений із певною точністю. Друга група ГТ має назву центральної граничної теореми (ЦГТ). ЦГТ встановлює умови, при яких закон розподілу суми великої кількості в. в. наближається до нормального, що також є надзвичайно важливим для економічної теорії і практики.

Обов'язковими для вивчення майбутніми економістами елементами ЗВЧ (у вказаній послідовності) є: нерівність Чебишева (НЧ), нерівність Маркова (НМ), теорема Чебишева (ТЧ) і наслідок з неї (НТЧ), теорема Бернуллі (ТБ) і теорема Пуассона (ТП) [1, с. 113-120; 2, с. 62-65]. Найбільш зручною і доступною для розуміння студентами нематематичних спеціальностей формою ЦГТ є теорема Ляпунова (ТЛ) [1, с. 131; 2, с. 70], що дозволяє надавати приклади змістовної практичної інтерпретації ЦГТ із галузі професійного спрямування майбутніх економістів.

Під час вивчення вказаних елементів ЗВЧ слід наголосити на їх практичному і теоретичному значенні. Такий підхід створює умови уникнення формального вивчення ГТ за рахунок демонстрації їх прикладної спрямованості, а також дозволяє встановити логічні зв'язки теми з іншими навчальними дисциплінами.

На прикладі НЧ продемонструємо методику подання ГТ, адаптовану для майбутніх економістів-аграріїв. Важливе значення має формулювання теорем, що повинно бути достатньо суворим із позиції математики (принцип науковості), але й доступним (принцип доступності).

Теорема 1. Якщо в. в. X має математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується НЧ: $P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Це твердження з використанням математичної символіки має вид: $M(X) = a,\ \sigma(X) = \sigma \Rightarrow \forall \varepsilon > 0:\ P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Доведення НЧ для неперервної в. в. X, що має щільність $f(x)$.

$$P(|X - a| \geq \varepsilon) = P(X \leq a - \varepsilon) + P(X \geq a + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{|x-a|\geq\varepsilon} f(x)dx = \int_{|x-a|\geq\varepsilon} 1 \cdot f(x)dx = \left| \begin{array}{c} |x - a| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (x-a)^2 \geq \varepsilon^2 \\ \dfrac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} \geq 1 \end{array} \right| \leq$$

$$\leq \int_{|x-a|\geq\varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} \cdot f(x)dx == \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-a|\geq\varepsilon} (x-a)^2 f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

.

Аналогічний результат для дискретної в. в. одержимо, якщо у доведенні замінити $\int\limits_{|x-a|\geq\varepsilon} f(x)dx$ на $\sum\limits_{|x_i-a|\geq\varepsilon} x_i p_i$.

НЧ використовується для доведення теорем ЗВЧ та для оцінки на практиці ймовірностей подій, пов'язаних із в. в., розподіл яких невідомий.

На основі поняття ймовірності протилежної події, НЧ можна записати у формі, що є більш зручною для практичних задач:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \tag{1}$$

Приклад 1. Оцінити ймовірність, що відхилення довільної в. в. X від її математичного сподівання буде менше її потроєного середнього квадратичного відхилення σ.

З (1): $P(|X - M(X)| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}8889$.

Теорема 2. Для будь-якої невід'ємної в. в. X виконується НМ: $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$.

Доведення:

$$P(X \geq \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Нерівність (3) зручно записати у вигляді: $P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$.

Зауважимо, що коли в. в. X розподілена за нормальним законом, то $P(|X \sim N(a,\sigma) - M(X)| < 3\sigma) \approx 0{,}9973$. Це правило «3-$\sigma$» [1, с. 124], що має практичне значення. НМ використовується для його обґрунтування.

Головне твердження ЗВЧ містить ТЧ, у якій використовується поняття «збіжність за ймовірністю»: в. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ збігаються за ймовірністю до числа A, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - A| < \varepsilon) = 1$. Символічний запис: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} A$.

Наступна теорема – ТЧ, представляє ЗВЧ у формі Чебишева.

Теорема 3. Якщо в. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незалежні й існує таке число $C > 0$, що $D(X_i) \leq C,\ i = \overline{1,n}$, то середнє арифметичне цих в. в. збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$.

На твердженні ТЧ ґрунтується вибірковий метод математичної статистики, оскільки ця теорема дає відповідь на запитання про те, чому про властивості великої кількості однорідних об'єктів (генеральної сукупності) можна судити за їх невеликою кількістю – вибіркою.

Наслідок із ТЧ: якщо в. в. $X_1, X_2, ..., X_n$ незалежні й мають однакові розподіли з числовими характеристиками $M(X_i) = a$ і $D(X_i) = \sigma^2$, то їх арифметичне цих в. в. збігається за ймовірністю до a: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p} a$.

НТЧ обґрунтовує і пояснює, чому на практиці у якості наближеного значення величини a береться середнє арифметичне з кількох її вимірювань: $a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Приклад 2. Глибина ставка вимірюється приладом, що не має систематичної похибки. Середнє квадратичне відхилення вимірювань не перевищує 15 см. Скільки потрібно зробити вимірювань, щоб із надійністю не менше 90% визначити глибину ставка з точністю до 5 см?

Позначимо: X – в. в., що означає глибину ставка; n – кількість вимірювань; X_i – результати вимірювань, $i = \overline{1, n}$. Тоді: $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – глибина ставка, визначена експериментально; $M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$ – оцінка істинної (невідомої нам) глибини ставка.

Для розв'язування задачі слід розглянути вираз $P(|X - M(X)| < \varepsilon)$.

За умовою, вимірювальний прилад не має систематичної похибки і всі вимірювання проводяться з однаковою точністю, т. т. $M(X_i) = a$, тому за

НТЧ, $M\left(X\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\cdot na=a$. Враховуючи, що $D(X_i)=\sigma^2 \le 15^2$, і

$$D\left(X\right)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right), D\left(X\right)\le\frac{1}{n^2}n\cdot 15^2=\frac{15^2}{n}.$$

Задана точність (величина похибки) має бути до $\varepsilon=5$. Використаємо НЧ у формі (1), і знайдемо: $P\left(\left|X-a\right|<5\right)\ge 1-\frac{15^2}{n\cdot 5^2}=1-\frac{9}{n}\ge 0{,}9 \Rightarrow n\ge 90$.

ТБ – найбільш проста форма ЗВЧ. Вона теоретично обґрунтовує властивість стійкості відносної частоти події, т. т. можливість обчислення ймовірності події за її відносною частотою. Перед її розглядом необхідно нагадати студентам означення відносної частоти та ймовірності події.

Теорема 4. (ЗВЧ у формі Я. Бернуллі). Якщо ймовірність події A в кожному з n незалежних випробувань однакова і рівна p, а кількість появ події A при n незалежних випробуваннях рівна n_A, то відносна частота події A збігається за ймовірністю до ймовірності події A: $P^*(A)\xrightarrow[n\to\infty]{p}P(A)$.

У цьому випадку НЧ (1) для в. в. $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ набуває виду:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (2)$$

Узагальненням теореми Бернуллі на випадок, коли ймовірності події A у кожному з n випробувань є різними і рівними p_i, є **теорема Пуассона**: відносна частота події A збігається за ймовірністю до середнього значення ймовірностей p_i: $P^*(A)\xrightarrow[n\to\infty]{p}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i$.

Приклад 3. Ймовірність помилки у підсумку бухгалтерського звіту дорівнює 0,2. Яка ймовірність, що відносна частота помилок у підсумках пакету з 400 звітів відрізняється від ймовірності помилки менше, ніж 0,05?

Розв'язання. З НЧ у вигляді (2), при p=0,2; q=0,8; n=400; $\varepsilon = 0{,}05$, одержимо: $P\left(\left|\frac{n_A}{n} - 0{,}2\right| < 0{,}05\right) \ge 1 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{400 \cdot 0{,}05^2} = 0{,}84$.

ЦГТ встановлює умови, при яких закон розподілу в. в. X наближається до нормального закону розподілу: $X \sim N(a, \sigma)$.

Теорема 5. (ЦГТ у формі Ляпунова). Якщо в. в. $X_1, X_2, .., \mathrm{X_n}$: незалежні, однаково розподілені, мають однакові (скінчені) математичні сподівання $M(X_i) = a$ і дисперсії $D(X_i) = \sigma^2$, то в. в. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ має розподіл, близький до нормального з параметрами $M(X) = na$ і $\sigma(X) = n\sqrt{\sigma}$, т. т.: $X \sim N(na, n\sqrt{\sigma})$.

На практиці твердження ТЛ означає, що коли в. в. X є сумою великої кількості незалежних в. в. X_i, т. т. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, вплив кожної з яких на всю суму нескінченно малий, то X має розподіл близький до нормального. Крім того, локальна та інтегральна теореми Лапласа є наслідками ТЛ.

Висновки. Викладене вище демонструє методичні особливості обґрунтування переходу від вивчення основ теорії ймовірностей до математичної статистики в процесі підготовки здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей у ВАНЗ. Описані прийоми створюють умови для неформального засвоєння ГТ за рахунок демонстрації їх прикладної спрямованості, дозволяють встановити зв'язки цієї теми з іншими навчальними дисциплінами, що сприяє набуттю студентами необхідних математичних і професійних компетентностей. Експериментальні підтвердження основних теоретичних положень ЗВЧ і ЦГТ доцільно демонструвати шляхом навчального комп'ютерного імітаційного експерименту. На цей час існує ряд досліджень, присвячених використанню ІКТ у навчанні вищої математики, зокрема у ВАНЗ. Але серед них відсутні ті, що розкривають тему ГТ. Тому перспективою подальших наукових розвідок є використання ІКТ під час вивчення ГТ.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – 4-те вид., випр. та доп. – К. : Центр навчальної літератури, 2010. – 424 с.
2. Бирюкова Л. Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. Пособие / Л. Г. Бирюкова, Г. И. Бобрик, В. И. Ермаков, В. И. Матвеев, Р. В. Сагитов, Е. В. Швед; под ред. В. И. Ермакова – М. : ИНФРА-М, 2010. – 297 с.
3. Про затвердження переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти [Електронний ресурс] : постанова КМУ від 29 квітня 2015 р. № 266. – Режим доступу : http://www.kmu.gov.ua/control/ru/cardnpd?docid=248149695
4. Про особливості запровадження переліку галузей знань і спеціальностей, за якими здійснюється підготовка здобувачів вищої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 29 квітня 2015 року № 266 [Електронний ресурс] : наказ МОНУ № 1151 від 06.11.15 року. – Режим доступу : http://osvita.ua/legislation/Vishya_osvita/48542/
5. Про перелік напрямів, за якими здійснюється підготовка фахівців у вищих навчальних закладах за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавра [Електронний ресурс] : постанова КМУ № 1719 від 13.12.2006. – Режим доступу : http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/1719-2006-п

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Флегантов Леонід Олексійович; кандидат фізико-математичних наук; доцент; Полтавська державна аграрна академія, професор кафедри вищої математики, логіки та фізики; методика навчання математичних

дисциплін, застосування ІКТ у навчанні математичних дисциплін, механіка руйнування.

Овсієнко Юлія Іванівна; кандидат педагогічних наук; доцент; Полтавська державна аграрна академія, доцент кафедри вищої математики, логіки та фізики; методика навчання математичних дисциплін, застосування ІКТ у навчанні математичних дисциплін.