Національний авіаційний університет
Філєр Залмен, Чуйков Артем

ГІПОТЕЗА РІМАНА ТА ЇЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Дослідження гармонічного ряду здійснювалось ще у середні віки. Французький вчений Ніколя Орем (1330-1382) у 1350 р. довів його розбіжність, показавши, що його сума більша суми членів арифметичної прогресії з різницею 0,5. У 1740 році Л. Ейлер показав, що його частинна сума $H_n = \ln(n+1) + \gamma_n$, де $\gamma_n \to 0{,}5722\ldots$. Філєр З. Ю. узагальнив це, показавши, що $S_n - I_n \to \gamma_f$, якщо функція $f(x)$ *обмежена* [1].

Дзета-функція Рімана ζ комплексної змінної *z* визначається за допомогою ряду $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Її аналітичне продовження при *z*, не рівному 0 і 1, задовольняє рівнянню $\xi(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \zeta(1-z)$, де $\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера. Це рівняння називається функціональним рівнянням Рімана. Із цього рівняння випливає симетрія нулів відносно прямої $\mathrm{Re}(z) = 0{,}5$, тобто, якщо існує корінь z, то є і корінь 1-z при тому ж $y = \mathrm{Im}\, z$. Корені $z \in \{-2, -4, -6, \ldots\}$, при яких обертається в нуль множник $\sin(\pi z/2)$, називають *тривіальними*. Нетривіальні корені лежать у *критичній смузі* $0 < x < 1$. **Гіпотеза Рімана** полягає в

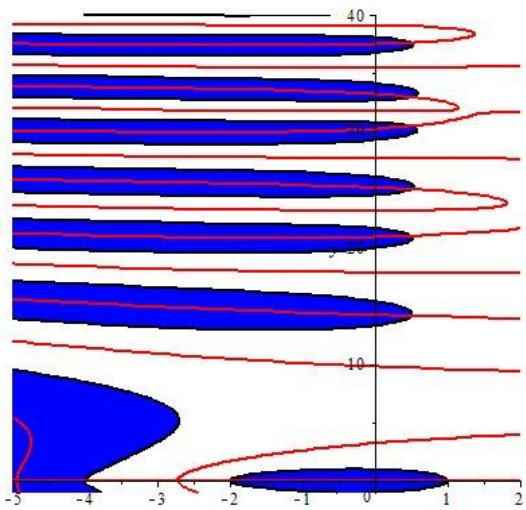

Рис. 1. Розташування коренів ζ(z)

тому, що усі нетривіальні нулі знаходяться на прямій $z=0,5+iy$. Уявлення про розміщення коренів дзета-функції дає рис. 1. При побудові рис. 1 використано те, що комплексні корені лежать у точках перетину *границі* області, де $\operatorname{Re}\zeta(z)<0$ (зафарбована синім) з лінією $\operatorname{Im}\zeta(z)=0$ (червона лінія). Нерівності у множині комплексних чисел ми розв'язуємо за допомогою впорядкування множини C: $a+bi<c+di \Leftrightarrow a<c$ або $a=c,\ b<d$. Графіки побудовано у пакеті символьних обчислень Maple 17.

На рис. 2 зображена структура області в околі четвертого кореня. Корінь видно на перетині лінії $\operatorname{Re}\zeta(z)=0$ (границя між темною і світлою областями) і лінією $\operatorname{Im}\zeta(z)=0$. На рис. 2 також показано зони «глибин» $\operatorname{Re}(\zeta(z)+a)<0$ (при *a>0*) та зони «висот» $\operatorname{Re}(\zeta(z)+a)>0$ (при *a<0*).

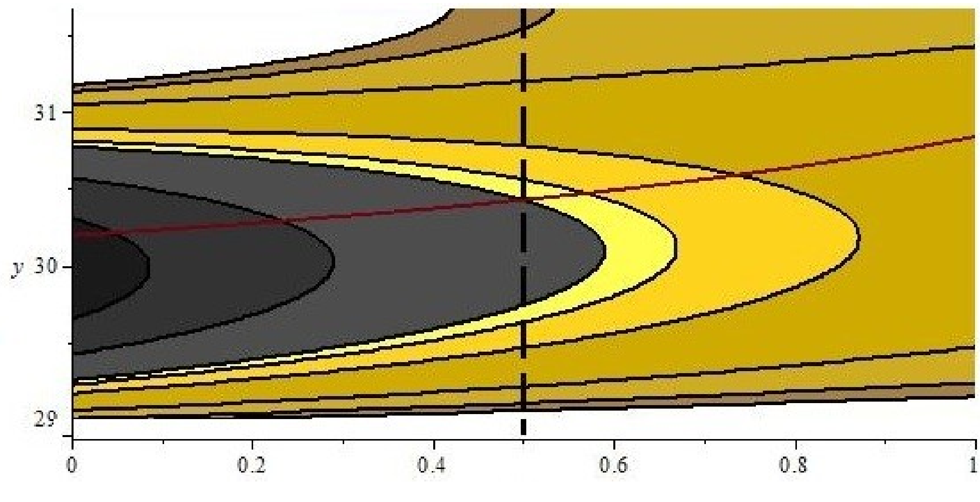

Рис. 2. Структура області біля четвертого кореня

Видно, що корінь знаходиться у точці $z=0,5+iy_4,\ y_4\approx 30,5$. Таким чином, якщо аналогічна структура зберігається для всіх нетривіальних коренів, то теорема Рімана доведена, оскільки якщо $x_k<0,5$, то є ще корінь $z_k^{'}=1-x_k-iy_k$, але він лежить у іншій зоні, де $\zeta(z)>0$; якщо ж $x_k>0{,}5$, то $1-x_k<0{,}5$ і там $\zeta(z)<0$.

Щоб побачити усю картину, застосуємо процес фінітизації функції $\zeta(z)$ вздовж осі OY (рис. 3), коли образ лінії описується формулою

$$F(t)=f\left(\frac{y_0+t}{1-t}\right)\frac{1-q^y}{1-q},\ 0<t<1.$$

Зручно розбити процес побудови фінітного образу критичної смуги на три етапи: а) $y_0=14$, $t\in(0;0{,}75)$; б) $y_0=59$, $t\in(0;0{,}75)$; в) $y_0=239$, $t\in(0;1)$.

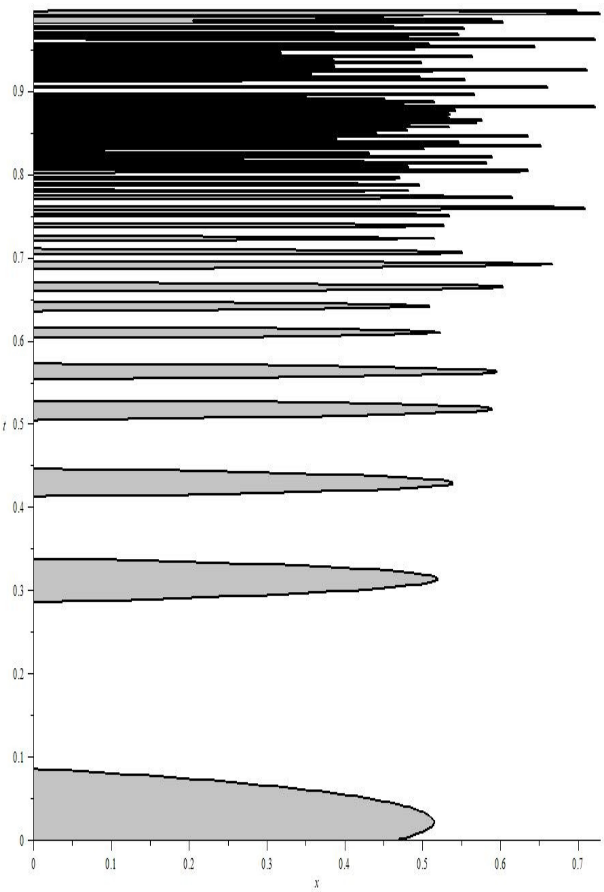

Рис. 3. **Фінітизація області Reζ(z)<0, 0<x<1, y=(14+t)/(1-t)**

Дзета-функція Рімана відіграє важливу роль у аналітичній теорії чисел, має застосування у теоретичній фізиці, статистиці, теорії ймовірностей. Гіпотеза Рімана часто розглядається як єдина нерозв’язана проблема Гільберта, жодна із спроб доведення якої не була визнана науковим товариством. Наразі знайдено більше 10 трильйонів перших нетривіальних нулів, і вони задовольняють цю гіпотезу.

Список джерел

1. Філер З. Ю., Штеренберг Й. Е. Застосування «сталих Ейлера» для сумування обмежених послідовностей. *Topical issues of modern science, society and education.* Proceedings of the 2nd International scientific and practical conference. Kharkiv, Ukraine, 2021. Pp. 252-261.

2. Филер З.Е., Чуйков А.С. О нетривиальных корнях дзета-функции Римана. *Topical issues of modern science, society and education.* Proceedings of the 8th International scientific and practical conference. Kharkiv, Ukraine, 2022. Pp. 319-323.

3. Філєр З. Ю., Чуйков А. С. Методика пошуку комплексних розв'язків нерівностей способом нев'язки. *Фізико-математична освіта*, 2021. Випуск 5 (31). С. 73-78.

4. Мусин Н.М. Компьютерные эксперименты с дзета-функцией Римана. **Журнал естественно-научных исследований**. Т. 2. №2, 2017. С. 47-52.