МЕХАНІКА

Широкий обсяг олімпіадних задач складають задачі з механіки. Цим розділом розпочинається навчання фізики другого ступеня, тому такі задачі складали зміст олімпіадних завдань не лише для учнів 9-х, а й 10-х та 11-х класів. Розділ складають чотири теми – це більше ніж інші розділи фізики. Саме тому за кількістю та різновидністю задач з механіки більше.
Класифікують задачі з механіки за темами. Для олімпіадних задач така класифікація носить відносний характер і не може бути витриманою. Кожна група розглянутих нижче задач характерна певними суттєвими для неї або змістом, або методами розв'язування, або використанням однакового математичного апарату і т.д.
Розглянемо групу задач, розв'язування яких має дві суттєві особливості: використання закону додавання швидкостей та виконання рисунків, на яких зображення шуканої величини не співпадає з "місцем" його очікуваного розташування, а лише інтерпретує цю величину для зручного визначення математичними методами.

КІНЕМАТИКА

Додавання швидкостей

Розглянемо групу задач, розв'язування яких має дві суттєві особливості: використання закону додавання швидкостей та виконання рисунків, на яких зображення шуканої величини не співпадає з „місцем" його очікуваного розташування, а лише інтерпретує цю величину для зручного визначення математичними методами.

Задача 76. Двоє тіл почали рух одночасно з точок *A* і *B* з однаковими (за модулем) швидкостями v_1 і v_2 (рис. 41). Яка найменша відстань буде між тілами, якщо відомо, що $AD= a$; $BD=b$; $\angle ADB=\alpha$.

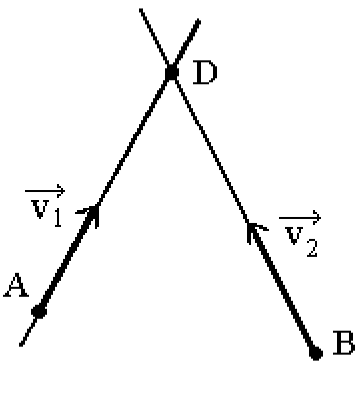


Рис. 41

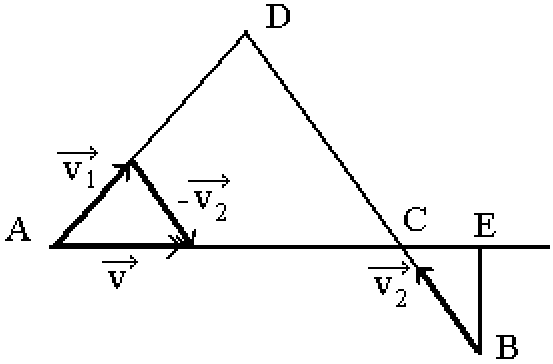


Рис. 42

Розв'язок. Розглядається відносний рух одного з тіл відносно другого. Так у системі відліку, зв'язаній з тілом *B* (рис. 42) тіло *A* рухається з швидкістю $\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ у на напрямі *AC*. Найближчою відстанню між тілами буде відстань *BE* (*BE*⊥*AC*). Трикутник швидкостей рівнобедрений, оскільки $v_1=v_2$. Отже, рівнобедрений і трикутник *ADC*. Тоді $\angle CBE=\frac{1}{2}\alpha$, $BC=BD-CD=b-a$, із трикутника *CBE* маємо $BE=BC\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\text{або } BE=(b-a)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 77. Пасажир прибігає на перон у момент, коли повз нього проходить передостанній вагон потягу. Визначить, на скільки запізнився пасажир, якщо передостанній вагон проїхав повз нього за час t_1, а останній – за час t_2.

Розв'язок. Час t_0 – це час проходження потягу без останніх двох вагонів. Довжина ж останнього вагона виражається рівнянням:

$$l = \frac{a(t_0+t_1+t_2)^2}{2} - \frac{a(t_0+t_2)^2}{2}.$$

Довжина останніх двох вагонів виражається рівнянням:

$$2l = \frac{a(t_0+t_1+t_2)^2}{2} - \frac{at^2}{2}.$$

розв'язуючи систему цих рівнянь відносно t_0, одержують:

$$t_0=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1^2}{2(t_1-t_2)}.$$

Для розв'язання наступних чотирьох задач відповідно до умови необхідно виконати аналогічний рисунок із зображенням шуканої величини. Для її визначення використовують зручні математичні формули та співвідношення. За необхідності виконують необхідні добудови рисунка. Для наведених задач зручними формулами є: теореми синусів, косинусів та Піфагора.

Задача 78. З міст *A* і *B*, відстань між якими *l*, одночасно виїхали два автомобілі з швидкостями v_1 і v_2. Вектори швидкостей утворюють з лінію

AB однакові кути, рівні 45^0 (рис. 43). Вважаючи рух автомобілів рівномірним і прямолінійним, визначити мінімальну відстань між ними.

Відповідь: $S_{\text{мін}} = \dfrac{l(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)}{\sqrt{2(\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_2^2)}}$.

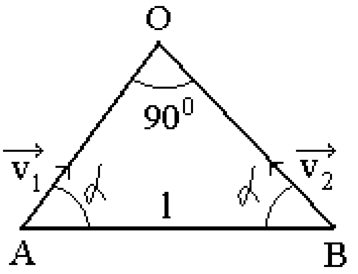


Рис. 43

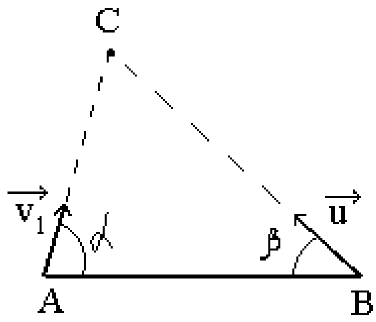


Рис. 44

Задача 79. Із порту *A* відправляється теплохід із швидкістю v під кутом α до прямої *AB* (рис. 44). Під яким кутом β до лінії *AB* має вирушити з порту *B* катер із швидкістю *u*, щоб зустрітися з теплоходом? Катер і теплохід розпочинають рух одночасно.

Відповідь: $\beta = \arcsin\left(\dfrac{\mathrm{v}}{u}\sin\alpha\right)$.

Задача 80. З аеродромів *A* і *B*, відстань між якими *l*, одночасно вилітають два літаки з швидкостями v_1 і v_2. Напрям польоту першого літака становить з лінією *AB* кут α, а другого – β (обидва кути гострі). визначити мінімальну відстань між літаками.

Відповідь: Мінімальна відстань між літаками дорівнює довжині перпендикуляра *AK* (рис. 45).

$$AK = l\sin\varphi = \frac{l(\mathrm{v}_2\sin\beta - \mathrm{v}_1\sin\alpha)}{\sqrt{\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2 + 2\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\cos(\alpha+\beta)}}.$$

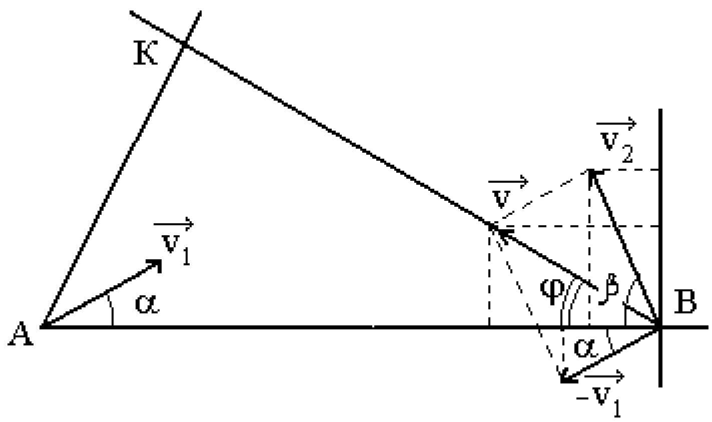


Рис. 45

Задача 81. Два автомобілі наближаються до перехрестя взаємно перпендикулярними дорогами з швидкостями v_1=54 км/год і v_2=7 км/год. Перший автомобіль на відстані l=2,7 км від перехрестя, другий l_2=4,8 км. Визначити мінімальну відстань між автомобілями і час, через який відстань стане мінімальною.

Відповідь: $d_{vsy} = \dfrac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 720$ м; $t = \dfrac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = 218{,}4$ с.

В задачах 82 і 83 для знаходження оптимального результату використовується умова екстремуму: $\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0$.

Задача 82. Хлопці організували на березі моря змагання. Стартуючи з точки A (рис. 46) на березі моря, треба досягти буйка B, розташованого на відстані l=120 м від берега. Берегову лінію вважати прямою; відстань від точки старту до основи перпендикуляра BC, опущеного на цю лінію, L=200 м. Кожен мав право пробігти будь-яку відстань берегом, а потім пливти до буйка. З якої точки берега найвигідніше почати пливти до буйка хлопцеві, швидкість бігу якого піщаним берегом $v_1 = 13\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість плавання $v_2 = 5\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$?

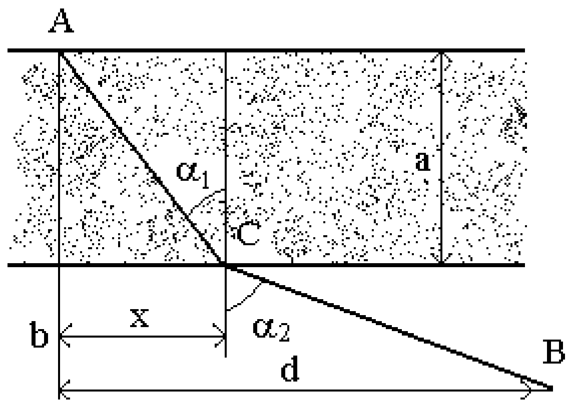


Рис. 46.

Розв'язок. Час бігу берегом до точки $D - t_1 = \dfrac{L - x}{v_1}$, а час запливу до буйка від точки $D - t_2 = \dfrac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v_2}$. Повний час руху $t = t_1 + t_2 = \dfrac{L - x}{v_1} + \dfrac{\sqrt{x^2 + l^2}}{v_2}$. Умова екстремуму: $\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0$.

Таким чином, $\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{x}{v_2\sqrt{x^2 + l^2}} - \dfrac{1}{v_1} = 0$.

Розв'язуючи рівняння відносно x, одержуємо x = 50 м.

Задача 83. З пункту А на березі каналу з нерухомою водою треба потрапити в пункт В на протилежному березі (рис. 47). Людина пливе через канал на човні з швидкістю v_1, а далі йде пішки з швидкістю v_2. Довести, що з А в В найшвидше вона потрапить, якщо $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

Графічні задачі

Задачі 84 - 87 – графічні. Якщо рух тіла не рівномірний, або не рівноприскорений, то аналізується кожна ділянка з однаковим прискоренням, дається оцінка щодо характеру руху, зміни певних його параметрів, можливості такого руху. Ретельність виконання графіків з дотриманням масштабу – запорука одержання формування вірного уявлення про характер руху та точності визначення шуканої величини.

Задача 84. Дано графік залежності швидкості точки від часу (рис. 47). На яку максимальну відстань від початкового положення відхилиться точка за цей час?

Розв'язок. Рух тіла розглядається на кожній ділянці відповідно до інтервалів часу, де швидкість мала однаковий знак. Це такі інтервали: t_1=1 *с;* t_2=3,5 *с*; t_3=8 *с*; t_4=11 *с*.

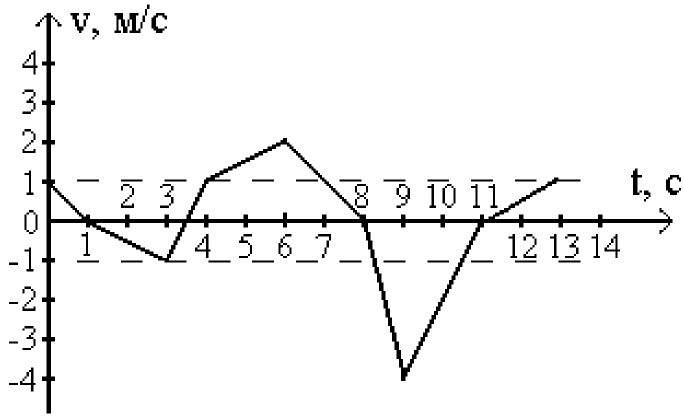


Рис. 47.

За графіком визначаються початкові і кінцеві швидкості та прискорення кожної ділянки, за якими розраховуються віддалення точки від положення рівноваги. Відповідно x_1= 0,5 *м*; x_2 = -0,75 *м*; x_3 = 4,5 *м*; x_4 = -1,5 *м*. Отже максимальне віддалення точки від положення рівноваги дорівнює +4,5 *м* у кінці 8-ї секунди.

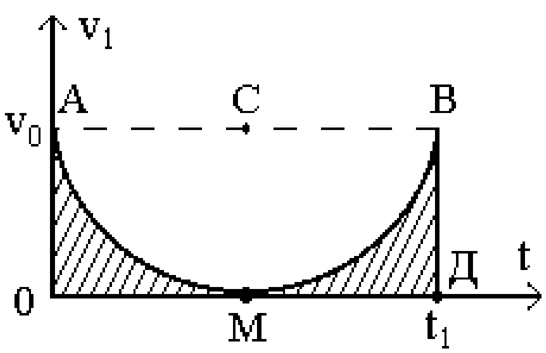


Рис. 48

Задача 85. Залежність швидкості першого тіла v*(t)* зображується дугою півкола AMB (рис. 48). За час t_1 це тіло пройшло такий самий шлях, як і друге, що рухалося зі швидкістю $v_2 = 50\frac{м}{с}$. Визначити початкову швидкість v_0 першого тіла.

Розв'язок. Шлях, пройдений першим тілом за час t_1, чисельно дорівнює площі під графіком (на рисунку 49 заштриховано). Знаходимо його як різницю площі прямокутника $v_0 t_1$ і еліпса (півколо на рисунку є частиною еліпса, тому що розмірність за осями графіка різна, а площа еліпса визначається за формулою $S=\pi ab$, Де a та b – півосі еліпса). Отже $S = \pi \frac{1}{2} v_0 \frac{1}{2} t_1$ – для першого тіла і $S = v_2 t_1$ – для другого. Порівнявши праві частини рівнянь, визначаємо: $v_0 = \frac{4v_2}{4-\pi} \approx 233 \frac{м}{с}$.

Задача 86. Машиніст поїзда, що рухався з швидкістю v_1=108 км/год, помітив попереду на відстані S_0=180 м поїзд, що рухався в той самий бік з швидкістю v_2=32,4 км/год. Машиніст увімкнув гальма, і перший поїзд дістав прискорення a = - 1,2 м/с^2. чи досить його, аби запобігти зіткненню поїздів? Реакція машиніста миттєва, розміри поїзда не враховувати.

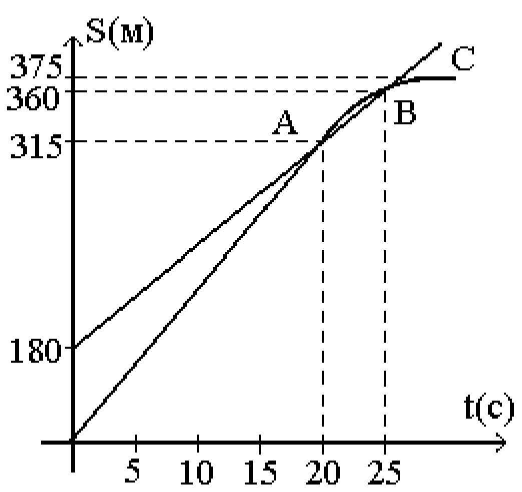


Рис. 49.

Розв'язок. Запишемо рівняння руху для обох поїздів:

$$x_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2; \qquad x_2 = S_0 + v_2 t.$$

Для часу зіткнення t, відліченого після початку гальмування, координати обох поїздів будуть однакові: x_1=x_2.

Тож прирівнявши праві частини рівнянь і підставивши числові значення, розв'яжемо одержане рівняння відносно часу t. $t^2 - 35t + 300 = 0$

Одержуємо два значення часу зіткнення: t_1=15 с; t_2=20 с.

Наочно це представлено на графіку (рис. 49). Точки A і B відповідають зіткненню поїздів, точка C – зупинці пасажирського поїзда (вершина параболи). На графіку вказані і координати зіткнень, та зупинки пасажирського поїзда, які не були визначеними в процесі наведеного розв'язку. Отже є і інші методи розв'язку, які корисно виконати.

Задача для самостійного розв'язку

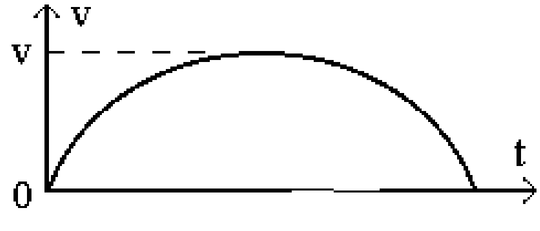


Рис. 50.

Задача 87. Залежність $v(t)$ має вигляд половини еліпса (рис. 50), максимальна швидкість v_m, а повний час руху t. Знайти пройдений шлях і середню швидкість. Чи можливий на практиці такий рух ?

Відповідь: $S = \frac{\pi}{4}\text{v}_\text{m}t;\qquad \text{v} = \frac{S}{t} = \frac{\pi}{4}\text{v}_\text{m}$.

Для початкового і кінцевого моментів часу прискорення $a = \frac{\partial \text{v}}{\partial t} = \infty$, на практиці такий рух не можливий.

Аналізуючи зміст задач на рух тіл по вертикалі, важливо чітко визначити вирази для часу руху, початкових та кінцевих швидкостей для характерних ділянок траєкторії. Саме такі вирази складають у певному співвідношенні формулу для шуканої величини.

Рух тіла по вертикалі

Аналізуючи зміст задач на рух тіл по вертикалі, важливо чітко визначити вирази для часу руху, початкових та кінцевих швидкостей для характерних ділянок траєкторії. Саме такі вирази складають у певному співвідношенні формулу для шуканої величини.

Задача 88. На підвішеній нитці закріплено n свинцевих кульок так, що нижня кулька майже дотикається до підлоги. верхній; кінець нитки відпускають, і кульки одна за одною вдаряються об підлогу. Як мають відноситися відстані між кульками і відстані від кульок до підлоги, щоб було чути удари через рівні інтервали часу ?

Розв'язок. Розглянемо для $n+1$, n та n-1 кульки. Вони будуть знаходитись на таких відстанях від підлоги:

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}g(n+1)^2\Delta t^2;\qquad h_n = \frac{1}{2}gn^2\Delta t^2;\qquad h_{n-1} = \frac{1}{2}g(n-1)^2\Delta t^2.$$

Тоді відстань між n і $n+1$ кульками $h_{n+1} - h_n = \frac{1}{2}g\Delta t^2\left((n+1)^2 - n^2\right)$, а між n і n-1 $h_n - h_{n-1} = \frac{1}{2}g\Delta t^2\left((n-1)^2 - n^2\right)$.

Для відношення відстаней між кульками одержуємо :

$$\frac{h_{n+1} - h_n}{h_n - h_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n-1}.$$

Відношення відстаней від кульки до підлоги $\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$ тобто дорівнює відношенню квадратів цілих чисел.

Задача для самостійного розв'язку

Задача 89. Запущену вертикально вгору з швидкістю $v_1 = 3000\frac{м}{с}$ ракету необхідно за мінімальний час знищити другою ракетою, швидкість якої на 10% менша. Ракети запускають з того самого місця. Через який час після запуску першої ракети слід запустити другу?

Відповідь: $\tau = \frac{1}{g}\left((v_1 - v_2) + \sqrt{v_1^2 - v_2^2}\right) \approx 164\ с.$

Рух тіла під дією сили тяжіння

Тіло, яке кинуто під кутом до горизонту, рухається по параболі, яка описується функцією виду $f(x) = 3x\text{-}0{,}2x^2$. То ж легко і зручно за похідною визначають координату x**,** для вершини, де вертикальна складова швидкості рівна нулеві. Використовуючи метод проектування руху на вертикальну і горизонтальну вісі, в ряді випадків раціонально розглядати половину траєкторії: або від точки кидання до вершини, або від вершини до точки падіння. Варто також врахувати, що при падінні тіла на тверду поверхню і відбиванні кут падіння рівний куту відбивання.

В ряді випадків громіздкі розрахунки доцільно замінити графічним визначенням шуканої величини за ретельно виконаним графіком, як це виконано у наступній задачі.

Задача 90. У конічній лунці з вертикальною віссю симетрії і кутом розхилу 2α, стрибає кулька, вдаряючись об протилежні точки *A* і *B*, розташовані на одній горизонталі, через один і той самий час τ (рис. 51). Визначити максимальну і мінімальну швидкості руху кульки.

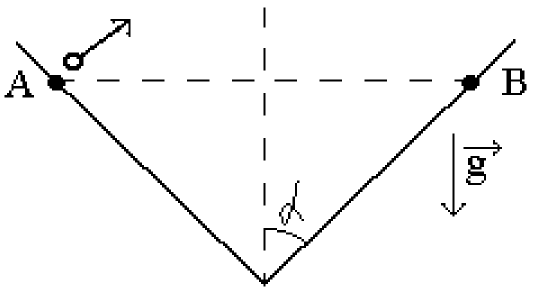


Рис. 51.

Розв'язок. Враховуючи те, що точки *A* і *B* розташовані на одній горизонталі, слідує, що удари відбуваються під кутами, рівними 90°. Швидкість в мить відбивання направлена до горизонту під кутом α, для таких моментів вона і буде максимальною, а мінімальною – у вершині параболи. Для половини параболи можна записати:

$v_{макс}\sin\alpha = g\frac{\tau}{2}$ $v_{макс}\sin\alpha = g\frac{\tau}{2}$, *звідки* $v_{макс} = \frac{g\tau}{2\sin\alpha}$

Тоді для $v_{мін}$ одержуємо:

$$v_{мін}=v_{макс}\cos\alpha=\frac{g\tau}{2\sin\alpha}\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}g\tau\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

$$v_{мін}=v_{макс}\cos\alpha=\frac{g\tau}{2\sin\alpha}\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}g\tau\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Задача 91. На пружну плиту вільно падають сталеві кульки. Перша – з висоти h=44 *см*, а друга – h=11 *см* через час τ після першої. через деякий час швидкості кульок збігатимуться за значенням і напрямком. Визначити час τ і проміжки часу, протягом якого швидкості обох кульок однакові. Між собою кульки не стикаються.

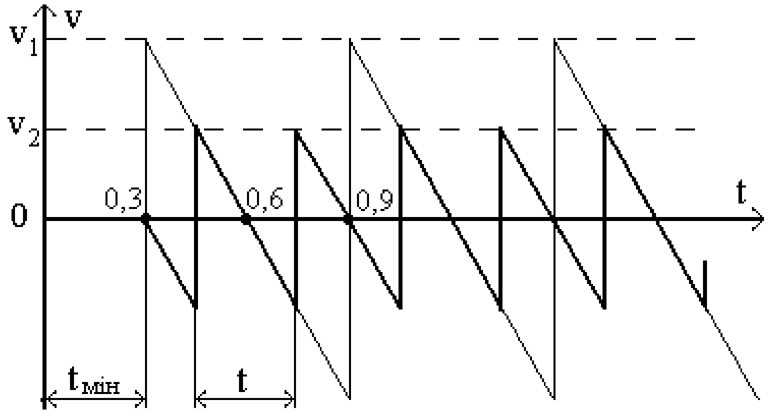


Рис. 52.

Розв'язок. Час падіння першої кульки $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}\approx 0{,}3c.$ Відношення максимальних швидкостей кульок $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}=\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}=\frac{1}{2}.$ Будують графік швидкостей (рис. 52). За графіком мінімальний час τ=0,3 *с*. Видно, що друга кулька може почати падіння через 0,6; 0,9; 1,2 *с* і так далі, після початку падіння першої. Час t , протягом якого швидкості обох кульок однакові, дорівнює 0,3 *с*.

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 92. Струмінь пожежного насоса описує параболу, задану функцією $f(x)=3x-0{,}2x^2$. Визначити максимальну висоту і дальність польоту струменя води.

Відповідь: $h_{макс}$=11,25 м, $l_{макс}$=15 м. $t=l\sqrt{\frac{2}{gh}}.$

$$h_{макс.}=11{,}25\,м,\quad l_{макс.}=15\,м.$$

Задача 93. З дротини довжиною l виготовили спіраль висотою h із сталим кроком і закріпили так, щоб її вісь була вертикальною. За який час надіта на дротину маленька намистинка, відпущена з верхньої точки спіралі, досягне її кінця ?

Відповідь: $t = l\sqrt{\dfrac{2}{gh}}$.

Задача 94. Скільки часу тіло рухалося з точки *A* в точку *B* (рис. 53), якщо в точці *A* його швидкість дорівнювала v = 20 *м/с*?

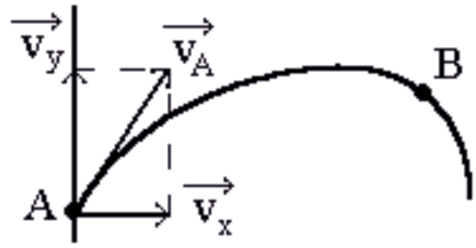


Рис. 53

Відповідь: t = 2,4 *с*.

Кінематика обертового руху матеріальної точки

Характерною рисою олімпіадних задач на кінематику обертового руху є присутність одночасно обертового і поступального рухів, де траєкторія останнього не завжди є прямолінійною. Разом з тим складність процесів розв'язування пов'язана з умінням і ретельністю знаходження сумарної швидкості, що в свою чергу потребує виконання порівняно громіздких математичних перетворень.

Задача 95. На масивний диск радіуса *R* намотано дві нитки, закріплені в точках *M* і *N* (рис. 54). Диск рухається так, що нитки весь час натягнуті. В момент, коли кут між нитками дорівнював α, кутова швидкість обертання диска дорівнювала ω. З якою швидкістю рухався в цей момент центр диска?

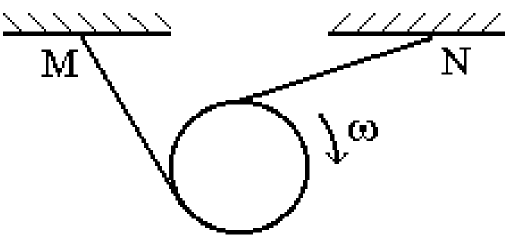


Рис. 54

Розв'язок. Так як нитки весь час натягнуті і залишаються намотаними, то вони будуть дотичними до диску. нехай точками дотику будуть *A* і *B* (рис. 55). У системі відліку, зв'язаній з центром диску, швидкості U_A і U_B цих точок за модулем дорівнюють ω*R* і спрямовані вздовж ниток. У системі відліку зв'язаній – з землею швидкості v_A і v_B можуть бути спрямовані лише перпендикулярно до ниток, оскільки нитки весь час натягнуті.

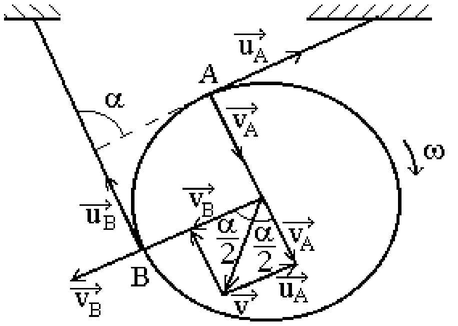


Рис. 55.

Тому вектор $\vec{v}_B = \vec{U}_A + \vec{v}$ перпендикулярний до $\vec{U}_B$, а вектор $\vec{v}_A = \vec{U}_A + \vec{v}$ перпендикулярний до $\vec{U}_A$. З рисунку видно, що при додаванні відповідних векторів утворюються рівні прямокутні трикутники, з яких і визначається шукана швидкість центру диску, тобто

$$v = \frac{U_A}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\omega R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 96. Циліндр радіуса r=20 *см* рівномірно котиться по внутрішній поверхні нерухомого циліндра радіуса R=21 *см* (рис. 56), так, що його центр C робить $n = 2$ *об/хв*. За який час циліндр здійснить повний оберт навколо своєї осі?

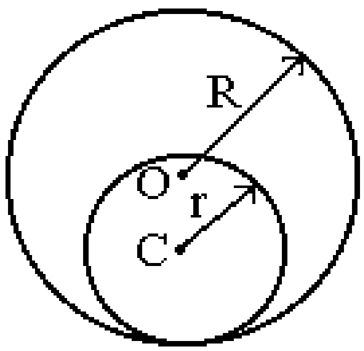


Рис. 56.

Розв'язок. Шукана величина – це період обертання малого диску. Тому його можна визначити за відомою формулою $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$. Отже задача зводиться до відшукання кутової швидкості малого циліндра. Для центра C, враховуючи, що точка C рухається по колу радіусом r_c=R-r і обираючи за одиниця часу 1 хв, для кутової швидкості одержуємо ω_c=$2\pi(R$-$r)n$. Для малого циліндра $\omega = \frac{2\pi(R-r)n}{r}$.

Підставивши у вираз для T, остаточно одержують:

$$T = \frac{r}{n(R-r)} = 10\,(\text{хв.})$$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 97. Котушка складається з внутрішнього циліндра r, на який намотана нитка, і зовнішнього – радіуса R. Під дією натягу нитки котушка котиться без ковзання по горизонтальній поверхні. Нитку тягнуть із швидкістю v під кутом α до горизонту. Визначити швидкість v_0 осі котушки та її напрям при різних кутах.

Відповідь:

$$v_0 = \frac{vR}{|R\cos\alpha - r|}; \qquad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0 \to v_0 = 0;$$

$$\text{при} \quad \alpha < \alpha_0 \to \text{вправо};$$

$$\text{при} \quad \alpha > \alpha_0 \to \text{вліво}.$$

Задача 98. Колесо радіуса *R* рухається поступально по поверхні Землі із швидкістю v_0 обертається з кутовою швидкістю ω. Визначити тангенціальну і нормальну проекції прискорення деякої точки *А* на ободі колеса в системі відліку, зв'язаній із Землею.

Відповідь:

$$a_T = \frac{\omega^2 R v_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}}; \qquad a_H = \frac{\omega^3 R^2}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}}.$$

Рух тіла за складною траєкторією

Рух тіла за складною траєкторією потребує з'ясування і врахування умов за яких відбувається зміна напрямку руху.

Задача 99. З висоти *H* падає маленький пружний м'ячик на поверхню клина з кутом α при основі. В цей самий момент клин починає рухатися в горизонтальному напрямі зі сталим прискоренням. Визначити час між двома послідовними ударами м'ячика об поверхню клина, якщо ці удари відбувалися в одній і тій самій точці поверхні.

Розв'язок. За виконаним рисунком видно, що удари відбувалися на однаковому рівні, після першого удару м'ячик відскочив під кутом 2α до вертикалі. З *H* визначають v відбивання, а за останнім – час між ударами.

$$v_в = \sqrt{2gH}\cos\alpha; \quad v_в = g\frac{t}{2}; \quad t = 2\cos\alpha\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Задача 100. Людина стоїть на відстані d=50 *м* від дороги, по якій із швидкістю v_1=10 *м/с* їде автобус. У якому напрямі має бігти людина з швидкістю v_2=3 *м/с*, щоб зустрітись з автобусом, якщо відстань до нього

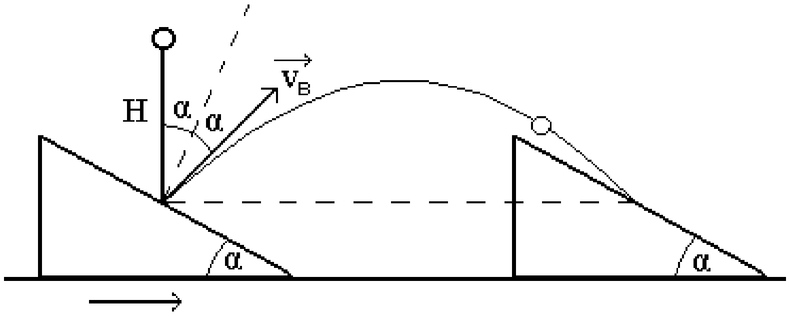


Рис. 57.

була l = 300 *м*? При якій мінімальній швидкості людина зустрінеться з автобусом?

Розв'язок. Нехай зустріч відбудеться в точці D (рис. 58). За умовою BD=$v_1 t$ *і* AD=$v_2 t_1$. Опустимо з точки D перпендикуляр на пряму AB. Площа трикутника ABD можна обчислити двома способами:

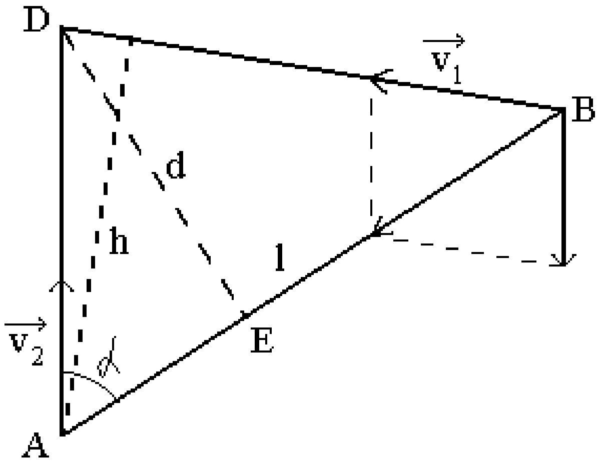


Рис. 58.

$$S = \frac{l}{2} DE; \quad S = \frac{DB \cdot d}{2} = \frac{v_1 t \cdot d}{2}.$$

Але $DE = AD \cdot \sin\alpha = v_2 t \cdot \sin\alpha.$

Отже: $d v_1 t = l \cdot v_2 t \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow$

$$\sin\alpha = \frac{d\, v_1}{l\, v_2} = \frac{50 \cdot 10}{200 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

$$\alpha = 56^0 27'.$$

Найменше значення швидкості людини $v_2 = \frac{d}{l} v_1 \ (\sin\alpha = 1).$

$$v_2 = \frac{50}{200} \cdot 10 = 2{,}5 \left(\frac{м}{с}\right).$$

Задача 101. Поперек річки, швидкість течії якої u, пливе човен. Швидкість човна відносно води v_0, спрямована під кутом α до лінії, перпендикулярної до течії річки. Під яким кутом φ відносно тієї ж лінії рухається човен? Яка швидкість його відносно берегів? Під яким кутом має пливти човен, щоб при заданих u і v_0 перепливти річку перпендикулярно до течії?

Розв'язок. З рис. 59 витікає, що $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{v_0 \sin\alpha + u}{v_0 \cos\alpha} = tg\alpha + \dfrac{u}{v_0\cos\alpha}$.

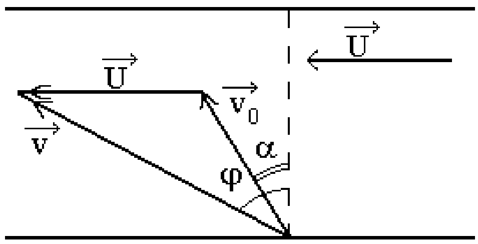


Рис. 59.

Але $(v_0 \sin\alpha + u)^2 + v_0^2\cos^2\alpha = v^2$.

Тоді одержуємо:

$$v_0^2\sin^2\alpha + 2v_0\sin\alpha\cdot u + u^2 + v_0^2\cos^2\alpha = v^2$$

$$v_0^2 + 2v_0\sin\alpha\cdot u + u^2 = v^2$$

$$v = v_0\sqrt{1 + 2\frac{u}{v_0}\sin\alpha + \left(\frac{u}{v_0}\right)^2}.$$

Човен перепливе річку перпендикулярно до течії, якщо φ=0. Зрозуміло, що це можливо за умови, коли $v_0 > u$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{u}{v_0\cos\alpha} = 0;\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{u}{v_0\cos\alpha} = 0;\quad \sin\alpha = \frac{u}{v_0};\quad u < v_0.$$

За інших умов рівняння втрачає зміст.

Задача 102. Людина під дощем у безвітряну погоду вимокне за t_1=2 *хв*; йдучи з швидкістю v_1=5 *км/год* – за t_2=1 *хв*. За який час t_3 вона змокне, якщо побіжить з швидкістю v_2= 20 *км/год*. "Змокнути" означає, що на людину потрапить певна кількість води.

Розв'язок. 1. Людина нерухома: краплини падають вертикально з швидкістю u; якщо горизонтальний максимальний переріз тіла людини S_1, тоді: $M=mS_1ut$, де m – маса краплини.

2. Коли людина йде з швидкістю v_1, то краплини падають під кутом до вертикалі: складові повної швидкості крапель відносно "нерухомої" людини:

$v_в=u;$ $v_г=v_1$.

Тому: $M=mS_1ut_1+mS_2v_1t_1$, де S_2 – переріз по вертикалі.

3. Коли людина біжить, то $M = mS_1ut_2 + mS_2v_2t_2$.

Отже:

$$mS_1ut = mS_1ut_1 + mS_2v_1t_1 \quad\Rightarrow\quad S_1u(t-t_1) = S_2v_1t_1 \quad і \quad S_1u(t-t_2) = S_2v_2t_2.$$

Тоді: $\dfrac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} = \dfrac{v_1t_2}{v_2t_3}$ $\qquad v_2t_3(t_1 - t_2) = v_1t_2(t_1 - t_3) - v_2t_3t_2$

$$t_3 = \frac{v_1t_1t_2}{v_1t_2 + v_2t_1 - v_2t_2} \qquad t_3 = \frac{5\cdot 2\cdot 1}{20\cdot 2 + 5\cdot 1 - 20\cdot 1} = 0{,}4\ (\text{хв}).$$

Задача 103. На горизонтальній поверхні котиться без ковзання обруч, прискорення його центра дорівнює $\vec{a}$. Визначити прискорення точок *A, B, C* і *D* обруча (рис. 60) через час *t* після початку його руху, якщо початкова швидкість центра обруча v_0.

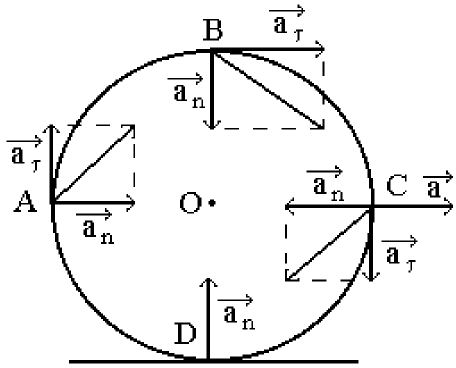


Рис. 60.

Розв'язок. $a_\tau = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta(v_0 + at)}{\Delta t} = a;$

$$a_n = a + a'; \quad a' = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 + at)^2}{R}.$$

Отже: $a_A = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{(v_0 + at)^2}{R} + a\right)^2}$

$$a_B = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad a_\tau = a + a = \frac{\Delta v}{\Delta t} + a = 2a,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 + at)^2}{R}; \quad a_B = \sqrt{4a^2 + \frac{(v_0 + a\tau)^4}{R^2}}$$

$$a_C = \sqrt{a^2 + (a_n - a)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\left(\frac{v_0 + at}{R}\right)^2 - a\right)^2}$$

$$a_D = a_n \qquad a_\tau a - a = 0 \qquad a_D = \frac{(v_0 + at)^2}{R}$$

Задача 104. Кулька падає в точку *A* (рис. 61) без початкової швидкості з висоти *h* і після кількох пружних ударів влучає в стінку *BC*. Який час пролине між падінням кульки в точку *A* і ударом в стінку?
Відстань від *A* до *B* дорівнює *S*.

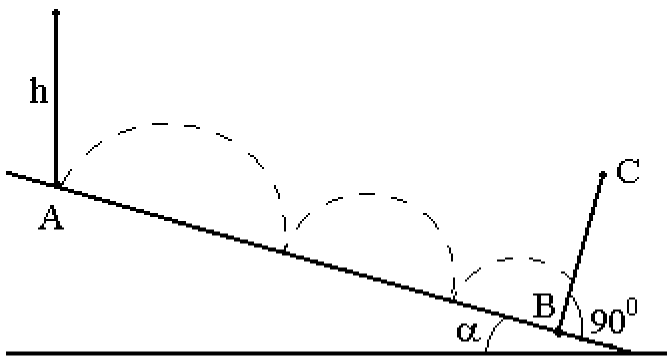


Рис. 61.

$$S = v_0 \sin\alpha \cdot t + \frac{g \sin\alpha \cdot t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2S = 2v_0 \sin\alpha \cdot t + g \sin\alpha \cdot t^2$$

$$g \sin\alpha \cdot t^2 + 2v_0 \sin\alpha \cdot t - 2S = 0$$

$$t^2 + \frac{2v_0 \sin\alpha}{g \sin\alpha} \cdot t - \frac{2S}{g \sin\alpha} = 0; \quad t^2 + \frac{2v_0}{g} \cdot t - \frac{2S}{g \sin\alpha} = 0$$

$$t = -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{4v_0^2}{g^2} + \frac{2S}{g \sin\alpha}}; \quad v_0^2 = 2gh$$

$$t = \sqrt{\frac{8gh}{g^2} + \frac{2S}{g \sin\alpha}} - \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{8h}{g} + \frac{2S}{g \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$t = \sqrt{\frac{2(S + 4h \sin\alpha)}{g \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Задача 105. Маленька кулька, кинута з початковою швидкістю v_0, під кутом α до горизонту, вдарилась у вертикальну стінку, що рухається назустріч з горизонтально спрямованою швидкістю u, і відстрибнула в точку, з якої була кинута. Визначити, через який час t після кидання відбулось зіткнення кульки зі стінкою? Тертя відсутнє.

Розв'язок. Так як стінка гладенька, то удар об неї не змінить вертикальну складову швидкості кульки. Повний час руху кульки t_1 є час піднімання та опускання на попередню висоту в полі сили тяжіння з вертикальною складовою швидкості $v_0 \sin\alpha$. Отже $t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Рух кульки по горизонталі складається з двох частин шляху: до співудару в стінку кулька рухалася зі швидкістю $v_0 \cos\alpha$; після зіткнення кулька пролетіла в протилежному напрямку такий же шлях, але з іншою швидкістю. Для розрахунку швидкості зворотного руху варто врахувати, що швидкість зближення кульки та стінки /по горизонталі/ була рівною $v_0 \cos\alpha + u$. Після абсолютно пружного удару кулька від стінки віддаляється зі швидкістю $v_0 \cos\alpha + u$, а тому відносно землі кулька має горизонтальну швидкість $\left(v_0 \cos\alpha + u\right) + u = v_0 \cos\alpha + 2u$.

Якщо до удару в стінку кулька летіла час *t*, то, порівнявши шляхи, які вона пройде до і після зіткнення, одержуємо рівняння:

$$v_0 \cos\alpha \cdot t = \left(t_1 - t\right)\left(v_0 \cos\alpha + 2u\right).$$

Так як повний час руху кульки є $t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, то одержуємо:

$$\left(v_0 \cos\alpha \cdot t + v_0 \cos\alpha + 2u\right)t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\left(v_0 \cos\alpha + 2u\right)$$

$$g\left(v_0 \cos\alpha + u\right)t = 2v_0 \sin\alpha\left(v_0 \cos\alpha + 2u\right)$$

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha(v_0 \cos\alpha + 2u)}{(v_0 \cos\alpha + u)g}.$$

ДИНАМІКА

Задачі з динаміки характерні високою складністю та об'ємністю розв'язків, які в міру розкладу за даним посібником зростатимуть. Віднесення їх до тієї чи іншої теми буде все більш умовним, так як використовуватимуться теоретичні основи великої кількості тем і розділів.

Про деякі прості помилки учнів

Практичне застосування законів Ньютона.

Для того, щоб встановити динамічне рівняння руху, потрібно, перш за все, встановити, які сили діють на розглядуване тіло. Для цього необхідно з'ясувати, з якими тілами взаємодіє дане тіло, дії яких тіл на досліджуване необхідно мати на увазі.

Наприклад, тіло на похилій площині (рис. 4): дія Землі – сила $m\vec{g}$; дія з боку похилої площини – $\vec{F}_{\text{р}}$ (цю силу за напрямком визначити важко, а тому її подають як суму двох сил $\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_n$).

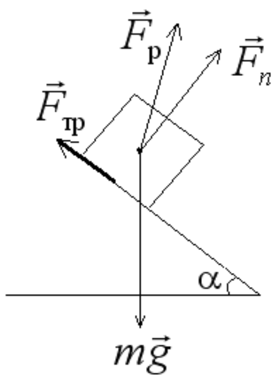


рис. 4

Ніколи не потрібно вводити в розгляд „рухомі”, „скочуючи”, „доцентрові”, „відцентрові” і тому подібні сили! Щоб не помилитись, необхідно характеризувати сили не за дією, яку вони зумовлюють, ні за динамічним або статичним проявами, а за „джерелом”, що викликає появу цієї сили. Отже, за кожною силою потрібно бачити тіло, впливом якого обумовлена сила. Типова помилка полягає у тому, що одна й та ж сила враховується двічі, але під різними назвами.

В розглянутому прикладі доцільно силу реакції $\vec{F}_{\text{р}}$ розкласти на дві складові: силу нормального тиску $\vec{F}_n$ і силу тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, це зокрема корисно й тому, що напрям цих сил відомий, а сила тертя пропорційна модулю сили нормального тиску. Тоді рівняння руху тіла на похилій площині матиме вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{р}} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_n .$$

Для обчислення необхідно від векторів перейти до проекцій векторів на відповідним чином вибрані напрями. При цьому користуються наступними властивостями:

- Рівні вектори мають однакові проекції.
- Проекція вектора $\vec{a} = k\vec{b}$ рівна добутку проекції вектора $\vec{b}$ на цей скаляр k.
- Проекція суми векторів дорівнює алгебраїчній сумі проекції векторів, що додаються.

Рух тіла за наявності сили тертя

Серед задач на рух за наявності сили тертя умовно можна виділити такі, де тіло чи система рухаються по горизонтальній поверхні. Розв’язування здійснюється відповідно до загального алгоритму розв’язку задач з механіки, разом з тим особливої уваги і ретельності потребують не лише визначення усіх сил, прикладених до тіла чи системи, а й знання відповідних формул для них.

Сила тертя, як і всяка інша сила, виконує роботу і змінює кінетичну енергію тіла за умови, якщо точка прикладання цієї сили переміщується в обраній системі відліку. Але на відміну від консервативних сил (тяжіння, пружність) робота сили тертя залежить від форми траєкторії, а отже, цю роботу не можна подати як зміну потенціальної енергії системи. Додаткові труднощі під час обчислення роботи створює специфіка сил тертя спокою.

Розглянемо кілька питань, що пов'язані з нерозумінням ролі сил тертя в зміні енергії системи тіл.

1. Про силу тертя ковзання.

Дуже часто стверджують, що сила тертя ковзання завжди виконує від'ємну роботу і це, як наслідок, веде до зростання внутрішньої енергії системи. Але такий висновок справедливий лише в тому випадку, коли мова йде про сумарну роботу всіх таких сил системи, а не про одну окремо взяту силу. Справа у тому, що робота будь-якої сили залежить від вибору системи відліку і в одній системі вона позитивна, а в іншій – негативна. А сумарна робота всіх сил тертя, що діють в системі не залежить від вибору системи відліку, а тому тільки від'ємна.

Приклад. Покладемо цеглину на рухомий візок так, щоб він ковзав по ньому (рис.1).

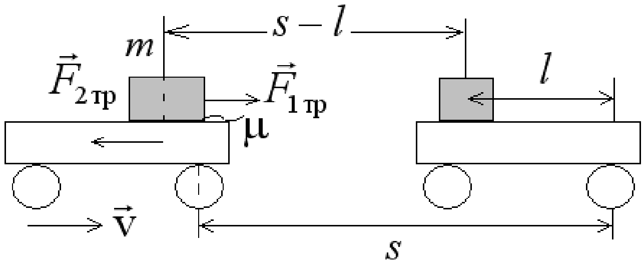


рис. 1

В системі Земля сила тертя $\vec{F}_{1тр}$, що діє на цеглину до припинення ковзання, виконує позитивну роботу $A_1 > 0$. Одночасно сила тертя $\vec{F}_{2тр}$, що діє на візок (за модулем вона рівна $\vec{F}_{1тр}$) виконує від'ємну роботу $A_2 < 0$, що більша за A_1, бо шлях візка s більший шляху цеглини $s-l$ (шлях цеглини відносно візка l). Отже,

$$A_1 = \mu mg(s-l);\ A_2 = -\mu mgs;\ A = A_1 + A_2 = -\mu mgl < 0.$$

Тому кінетична енергія системи спадає (переходить у теплову):

$$\Delta E_k = -\mu mgl < 0\,.\,m$$

Цей висновок має загальне значення. Дійсно, робота двох сил, що здійснюють взаємодію між тілами, не залежить від вибору системи відліку, в якій одне з тіл нерухоме, тоді в цій системі робота сили тертя, що діє на рухоме тіло, завжди від'ємна, бо сила тертя спрямована проти відносної швидкості. Але вона від'ємна і в будь-якій іншій системі відліку. Тому завжди, за будь-якої кількості тіл у системі, робота сили тертя від'ємна. Ця робота і є мірою зменшення механічної енергії системи.

2. Про силу тертя спокою.

У тому випадку коли на тіла, що дотикаються одне до одного, діє сила тертя спокою, тоді ні механічна, ні внутрішня енергія тіл не змінюється. Чи означає це, що робота сили тертя спокою рівна нулеві? Це твердження вірне лише по відношенню повної роботи сил тертя спокою над усіма тілами, що взаємодіють. Але одна, окремо взята сила тертя спокою може виконувати роботу, причому $A_{\text{тр}} < 0$ або $A_{\text{тр}} > 0$.

Наприклад, на столі у поїзді, що рушає, лежить книжка. Між столом і книгою діє сила тертя спокою, бо книжка змінює свою швидкість, як і поїзд (ковзання немає). Кінетична енергія книги зростає, це відбувається за рахунок роботи сил тертя спокою, що діють на неї з боку стола (поїзда). Але, така ж сила діє на поїзд з боку книжки, але ця сила спрямована протилежно до першої, виконує таку ж роботу, але ця робота від'ємна. Отже, повна робота цих двох сил тертя спокою рівна нулеві, а тому повна механічна енергія системи такого роду силами не змінюється. Одночасно, книжка збільшила свою механічну енергію, а поїзд на таку ж величину її зменшив (порівняно до того, яку б енергію він мав, якби книжки в поїзді не було).

3. Про рух самохідного транспортного засобу без ковзання коліс.

Найбільш стійким є неправильне тлумачення якраз цього явища. Нехай таким самохідним засобом є автомобіль (рис. 2).

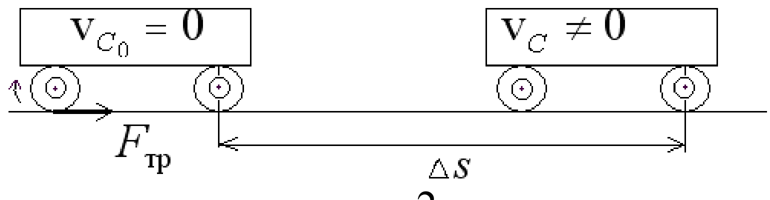


рис. 2

Єдина сила, що надає автомобілю прискорення, є сила тертя спокою $F_{\text{тр}}$, що діє на ведучі колеса (силами опору повітря і тертям кочення ми для спрощення знехтуємо).

Згідно теореми про рух центру мас, імпульс сил тертя рівний зміні імпульсу автомобіля:

$$F_{\text{тр}}\Delta t = \Delta\left(M v_C\right) = M v_C,$$

причому $v_{C_0} = 0$ і $v_C \neq 0$.

Автомобіль набуває швидкості, його імпульс зростає, одночасно зростає і його кінетична енергія. А тому, що імпульс надається силою тертя, тоді природно вважати, що і кінетичну енергію він одержує за рахунок роботи цієї сили. Це твердження повністю неправильне! Дійсно, сили тертя прискорюють автомобіль, але роботи при цьому не виконують? Але нічого парадоксального в такій ситуації немає!

Щоб проаналізувати ситуацію розглянемо просу модель: гладенький кубик з прикріпленою до однієї з перпендикулярних горизонтальному напрямку граней пружиною (рис. 3).

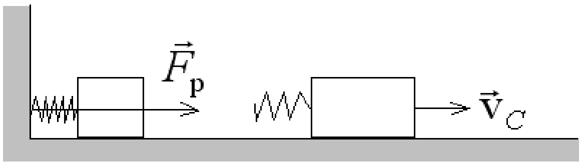


рис. 3

Кубик присувають до стінки, стискуючи пружину, а потім відпускають. „Відштовхуючись” від стіни, розглядувана система (кубик з пружиною) набуває певного імпульсу і кінетичної енергії. Є диною зовнішньою силою, що діє на систему у горизонтальному напрямку є сила реакції стіни $\vec{F}_\text{р}$. Якраз вона і надає системі прискорення. Але при цьому ніякої роботи вона, звичайно, не виконує, адже точка прикладання цієї сили нерухома (в системі відліку „Земля”), хоча сила і діє деякий час Δt (доки пружина дотикається до стіни).

Таку ж картину ми маємо для автомобілю, що розганяється без ковзання. Точка прикладання сили тертя спокою, що діє на ведуче колесо, тобто точка дотику цього колеса і дороги, в будь-який момент часу знаходиться в спокої відносно дороги (у системі відліку „Земля”). Під час руху автомобіля вона зникає в одній точці і зразу ж виникає в іншій. Чи не суперечить це законові збереження механічної енергії? Ні! У нашому випадку збільшення кінетичної енергії відбувається за рахунок внутрішньої енергії, яка виділяється при згорянні пального, а не за рахунок роботи сили.

Розглянемо тепер іграшковий автомобіль з пружинним механічним заводом. Двигун цього автомобіля використовує потенціальну енергію закрученої пружини.

1. У початковий момент пружина розтягнута (закручена):

$$E_{p1} = \frac{k(\Delta l)^2}{2};\; E_{k1} = 0;\; E_1 = E_{p1} + E_{k1} = E_{p1}.$$

2. Кінцевий момент пружина не деформована $E_{p2} = 0$, автомобіль одержав максимальну швидкість, $E_{k2} = \frac{m\mathrm{v}_C^2}{2}$, а повна енергія:

$$E_2 = E_{p2} + E_{k2} = E_{k2}.$$

Згідно закону збереження, порівнюючи початковий і кінцевий моменти маємо:

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}_C^2}{2}.$$

Для реального автомобіля:

$$\frac{m\mathrm{v}_C^2}{2} = \Delta U,$$

де ΔU – енергія, одержана при згорянні палива.

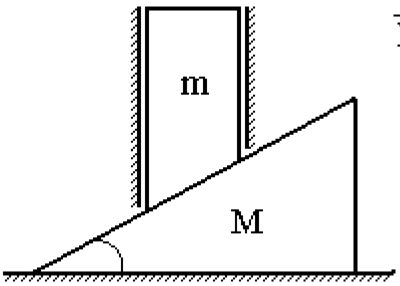
Коли колеса автомобіля ковзають, то $A_{\text{тр}} < 0$, бо точка дотику коліс автомобіля рухається проти напряму сил тертя ковзання. Тому:

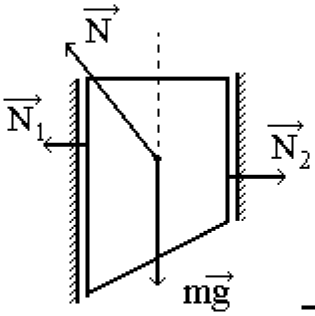
$$\frac{m\mathrm{v}_C^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + A_{\text{тр}}$$

Тому кінетична енергія автомобіля в такому разі буде меншою ніж за відсутності ковзання. Це одна з причин того, що шини виготовляють так, щоб їх зчеплення з дорогою було максимальним, а проковзування відсутнім. Подібним чином діють і гальма в автомобілі.

Задача 106. На гладенькій горизонтальній площині лежить клин масою *M* (рис. 62), на який спирається брусок масою *m*. Брусок може рухатись у вертикальному напрямі, тертя між бруском і напрямними відсутнє. Гострий кут при вершині клина дорівнює α. Визначити прискорення руху клина.

Розв'язок. На рисунках 63 і 64 показано сили, що діють відповідно на брусок і клин.





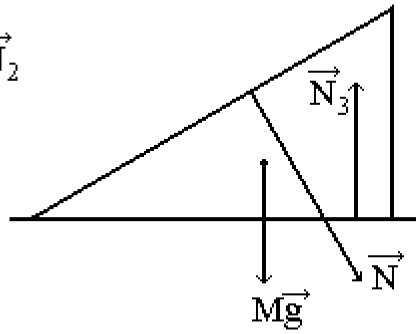


Рис. 62. Рис. 63. Рис. 64.

Введемо позначення: a_1 – прискорення бруска відносно нерухомого столу; a_2 – прискорення клину.

Рівняння рухів бруска і клину в горизонтальному і вертикальному напрямках мають вигляд:

$$\begin{cases} ma_1 = N_1 - N_2 + N\sin\alpha \\ ma_1 = mg - N\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} Ma_2 = N\sin\alpha \\ Ma_{2B} = N_3 - Mg - N\cos\alpha \end{cases}$$

Але $a_{1Г}$=$a_{2В}$=0.

Враховуючи це, рівняння набувають вигляду:

$$N_1 - N_2 = N\sin\alpha \qquad ma_2 = N\sin\alpha$$

$$ma_1 = mg - N\cos\alpha \qquad Mg - N_3 = N\cos\alpha$$

З геометричних міркувань витікає рівняння кінематичного зв'язку між прискореннями бруска та клину: $\frac{a_1}{a_2} = \mathrm{t}g\alpha$

Враховуючи цей зв'язок, виконаємо перетворення системи рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} m_1a_1 &= mg - N\cos\alpha \\ Ma_2 &= N\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{ma_1}{\cos\alpha} &= \frac{mg}{\cos\alpha} - N \\ \frac{Ma_2}{\sin\alpha} &= N \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{ma_1}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} - \frac{Ma_2}{\sin\alpha}; \quad \text{але} \quad a_1 = a_2\mathrm{tg}\alpha, \quad \text{тоді}$$

$$\frac{ma_2\mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} - \frac{Ma_2}{\sin\alpha}, \text{ або} \quad ma_2tg\alpha = mg - Ma_2\mathrm{ctg}\alpha.$$

Звідси для a_2 одержуємо:

$$a_2 = \frac{mg}{m\,\mathrm{tg}\alpha + M\,\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{mg}{\frac{M}{\mathrm{tg}\alpha} + m\,\mathrm{tg}\alpha},$$ або остаточно $$a_2 = \frac{mg\,\mathrm{tg}\alpha}{M + m\,\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Задача 107. Низенький двовісний візок зв'язаний ниткою з вантажем (рис. 65). Візок відпускають і він рухається по столу з деяким прискоренням. Дослід повторюють, заклинивши одну з осей (колеса жорстко насаджені на вісь). Прискорення візка зменшується в K разів. У скільки разів зменшиться прискорення, якщо відпустити візок, заклинивши обидві осі? Задачу розв'язати для K_1=1,5 і K_2=3.

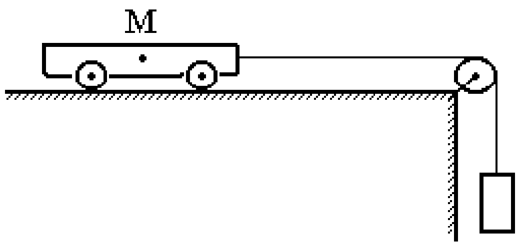


Рис. 65.

Розв'язок. На візок в горизонтальному напрямку діють сила натягу нитки та сила тертя кочення, тому:

$$Ma = T - F, \text{ звідки } a = \frac{T - F}{M}.$$

Для вантажу:

$$ma = mg - T \quad \Rightarrow \quad a = g - \frac{T}{m};$$

$$g - \frac{T}{m} = \frac{T}{M} - \frac{F_T}{M}; \quad T\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) = g + \frac{F_T}{M}; \quad T = \left(g + \frac{F_T}{M}\right)\frac{mM}{m+M};$$

$$a = \frac{T}{M} - \frac{F_T}{M}; \quad a = \left(g + \frac{F_T}{M}\right)\frac{m}{M+m} - \frac{F_T}{M} = g\frac{m}{m+M} + \frac{F_T m}{M(m+M)} - \frac{F_T}{M}$$

$$a = g\frac{m}{M+m} + \frac{F_T(m - m - M)}{M(m+M)} = g\frac{m}{m+M} - \frac{F_T}{m+M}$$

Коли загальмувати одну вісь, то сила тертя збільшиться на величину

$$F_T' = \mu N = \mu Mg.$$

Можна покласти, що $F_T' \gg F_T$, тому:

$$a_1 = g\frac{m}{m+M} - \frac{F_T}{m+M}; \quad a_1 = \frac{mg - F_T}{m+M}; \quad a_2 = \frac{mg - F_T''}{m+M}; \quad F_T'' = 2\mu Mg;$$

$$\frac{a}{a_1} = K_1 \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{mg - F_T}{mg - F_T'} = K_1$$

$$\frac{a}{a_2} = K_2 \qquad \frac{a}{a_2} = \frac{mg - F_T}{mg - F_T''} = K_2$$

$$mg - F_T = K_1(mg - F_T'); \quad mg - F_T = K_1(mg - \mu Mg)$$

$$mg - F_T = K_1 mg - K_1 \mu Mg \quad \Rightarrow \quad F_T = (K_1 \mu M - K_1 m + m)g$$

$$K_2 = \frac{mg - K_1 \mu Mg + K_1 mg - mg}{mg - 2\mu Mg}$$

$$K_2 = \frac{m - \mu M}{m - 2\mu M}.$$

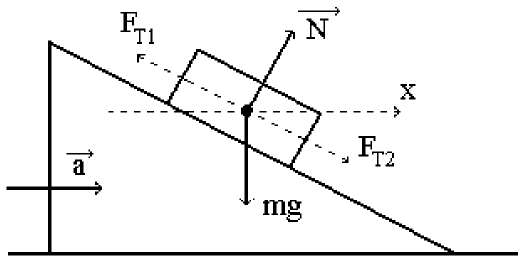


Рис.66.

Задача 108. Прямокутний клин, на похилій площині якого лежить брусок масою m, рухається праворуч із сталим прискоренням $\vec{a}$. З яким прискоренням рухається брусок по клину? При якому значенні прискорення $\vec{a}$ брусок залишається в спокої? Коефіцієнт тертя між бруском і клином μ=0,2; кут α=45^0.

Розв'язок. Розглянемо другу частину задачі: знайдемо прискорення а, при якому брусок ковзає вниз. На брусок діють сили: $m\vec{g}$, $\vec{N}$ і $\vec{F}_T$, спрямована паралельно похилій площині вгору. Одночасно брусок, знаходячись на похилій площині, разом з нею рухається вздовж вісі X з прискоренням $\vec{a}$. (рис. 66).

Тому: $\begin{cases} -mg + N\cos\alpha + F_{T1} = 0; \\ ma = N\sin\alpha - F_{T1}\cos\alpha; \end{cases} \qquad F_{T1} = \mu N.$

Звідси одержимо:

$$-mg + N + \mu N\sin\alpha = 0 \to N(1 + \mu\sin\alpha) = mg \to N = \frac{mg}{1 + \mu\sin\alpha};$$

$$ma = N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad \to \quad a = \frac{N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m}.$$

Підставивши вираз для N одержуємо:

$$a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(1+\mu\sin\alpha)m} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} g = \frac{tg\alpha - \mu}{1+\mu tg\alpha}.$$

Коли $a < \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha}$ – брусок ковзає вниз.

Для випадку, коли брусок ковзає угору, сила тертя F_{2T} спрямована вниз. Тоді:

$$\begin{cases} -mg + N\cos\alpha - F_{2T}\sin\alpha = 0 \\ -ma = -N\sin\alpha - F_{2T}\cos\alpha \end{cases} \qquad F_{2T} = \mu N$$

$$\begin{cases} -mg + N\cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0 \\ ma = N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha \end{cases} \qquad mg = N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$$

$$\begin{cases} N = \dfrac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \\ \mathrm{a} = \dfrac{N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m} \end{cases} \qquad a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}$$

$$a = g\,\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha}.$$

Брусок ковзає угору за умови, коли $a > g\,\dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha}$.

Отже брусок не буде рухатись по похилій площині якщо $\mu\mathrm{tg}\alpha > 1$, бо тоді $a < 0$, що неможливо. Крім того, прискорення задовольняє умову

$$g\,\frac{\mathrm{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu\mathrm{tg}\alpha} \le a \le g\,\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha}.$$

Задача 109. Визначити прискорення бруска масою m_1 (рис. 67). Вважати, що всі рухомі елементи рухаються без тертя, блоки і нитки – невагомі. Дано: m_1=40 *кг*, m_2=15 *кг*, α=1/6π.

Розв'язок. Сили, що діють на тіла системи, зображені на рисунку.

Виберемо і вкажемо на рисунку напрямки прискорень і запишемо відповідні рівняння для руху вантажів:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + m_1\vec{g}$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$$

Додаткові умови: $\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right|$; $\left|\vec{T}_1\right| = 2\left|\vec{T}_2'\right|$.

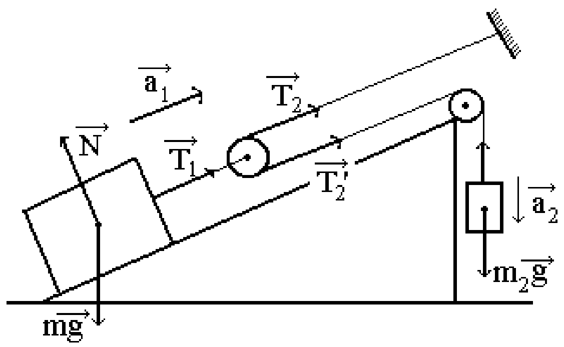


Рис. 67.

Спроектуємо рівняння руху на напрямки: паралельний похилій площині і вертикальний.

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \sin\alpha;$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2;$$

Враховуючи, що $T_2 = T_2'$ і $T_1 = 2T_2'$, одержуємо:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = 2T_2 - m_1 g \sin\alpha \\ m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \end{cases}$$

Одержано два рівняння з трьома невідомими, тому до умови додаємо і геометричну. Вона полягає в тому, що рухомий блок дає виграш в силі в два рази і такий же програш у переміщенні. Отже $a_2 = 2a_1$.

Враховуючи цю умову, маємо:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = 2T_2 - m_1 g \sin\alpha \\ 2m_2 a_1 = m_2 g - T_2 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему відносно шуканого прискорення.

$$m_1 a_1 = 2T_2 - m_1 g \sin\alpha$$

$$+$$

$$4m_2 a_1 = 2m_2 g - 2T_2$$

$$a_1(m_1 + 4m_2) = 2(m_2 - m_1 \sin\alpha) g$$

$$a_1 = \frac{2m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + 4m_2} g.$$

$$a_1 = \frac{30 - 40 \cdot \frac{1}{2}}{40 + 60} g = \frac{1}{10} g.$$

$$a_2 = \frac{2}{10} g.$$

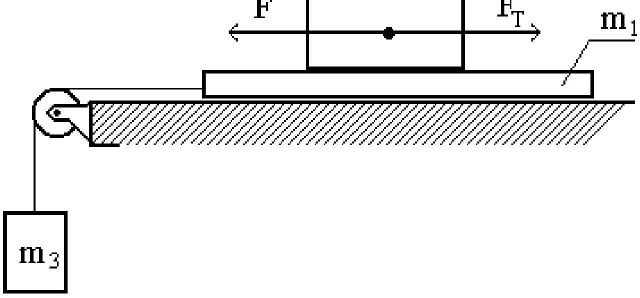


Рис. 68.

Задача 110. На гладкому горизонтальному столі лежить дошка масою m_1=1 *кг*, а на ній брусок масою m_2=2 *кг*. До дошки за допомогою горизонтально натягнутої легкої нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвішена гиря масою m_3=3 *кг*. При якому коефіцієнті тертя μ між дошкою і бруском останній переміщуватиметься відносно дошки? Масою блока і тертям у ньому знехтувати.

Розв'язок. Брусок буде переміщуватись відносно дошки за умови, коли сила, що діятиме на нього зі сторони дошки F стане рівною або більшою сили тертя між бруском і дошкою F_T: $F \ge F_T$, або $m_2 a \ge \mu m_2 g$; $a \ge \mu g$.

Для знаходження сили A запишемо другий закон динаміки для сил, що діють на систему тіл з масами m_3 і m_1:

$$m_3 g - \mu m_2 g = (m_3 + m_1)a$$

З останнього рівняння визначимо прискорення:

$$a = \frac{g(m_3 - \mu m_2)}{m_3 + m_1}.$$

Підставимо вираз для прискорення в рівняння другого закону динаміки для сил, що діють на брусок і з останнього визначимо шукану величину:

$$\frac{g(m_3 - \mu m_2)}{m_3 + m_1} \ge \mu g$$

$$\mu \le \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Задача 111. на краю дошки довжиною l і масою M лежить брусок масою m. Дошка лежить на гладенькому столі. Коефіцієнт тертя між бруском і дошкою μ. Брусок починають тягти з горизонтальною силою F. Через який час брусок сповзе з поверхні дошки?

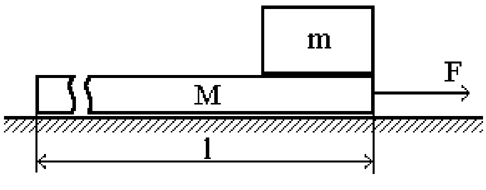


Рис. 69.

Розв'язок. За наявності постійно діючої сили брусок буде рухатись відносно дошки з певним прискоренням. Для переміщення вздовж дошки можна записати: $l = \frac{at^2}{2}$ звідки $t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$.

Запишемо другий закон динаміки для сил, прикладених до дошки і з одержаного рівняння визначимо її прискорення a_1:

$$F - \mu mg = Ma_1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{F - \mu mg}{M}.$$

Запишемо другий закон динаміки для сил, прикладених до бруска і також з одержаного рівняння визначимо прискорення а.

$$ma_1 - \mu mg = ma \qquad \rightarrow \qquad a = a_1 - \mu mg$$

$$a = \frac{F}{M} - \mu g\left(\frac{m}{M} + 1\right).$$

Підставивши вираз прискорення a у формулу для переміщення l, із останнього визначаємо шуканий час t.

$$t = \frac{2l}{\frac{F}{M} - \mu g\left(\frac{m}{M} + 1\right)}.$$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 112. Система з двох зв'язаних брусків і рухомого блока розміщена на гладкому горизонтальному столі (рис. 70). При якій мінімальній силі F бруски ковзатимуть один відносно одного, якщо коефіцієнт тертя між ними μ? Маса верхнього бруска m, нижнього – M /$M>m$/.

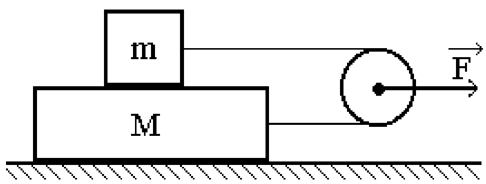


Рис. 70.

Відповідь: $F = 2\mu mg\,\dfrac{m+M}{M-m}$.

Задача 113. Яку силу потрібно прикласти людині, щоб пересунути на інше місце вантаж, якщо коефіцієнт тертя людини об підлогу і вантажу об підлогу однаковий і дорівнює μ=0,866? Маса людини m=100 кг, маса вантажу M=300 кг.

Відповідь: $F = \dfrac{g}{2}\sqrt{\mu^2(m+M)^2 + (M-m)^2}$.

Розрахунок сил натягу ниток

В задачах на розрахунок сил натягу ниток, перекинутих через блоки та прискорень підвішених до них вантажів, необхідно вказати сили, прикладені до кожного з тіл. Записати другий закон Ньютона для кожного тіла та спроектувати на вибрану вісь. За умовою задачі скласти решту рівнянь. розв'язати систему рівнянь відносно шуканих величин.

Задача 114. З яким прискоренням рухатимуться вантажі масами m_1 і m_2 (рис. 71)?

При якому співвідношенні між масами система перебуває у рівновазі? Тертям і масою блоків знехтувати.

Розв'язок. На рис. 72, відповідно до властивостей блоків вказано сили тяжіння. Вісь напрямлена вертикально вниз. Систему рівнянь складають записи другого закону Ньютона для сил, прикладених до кожного вантажу у проекції на вибрану вісь, та рівняння, що пов'язує співвідношення прискорень вантажів:

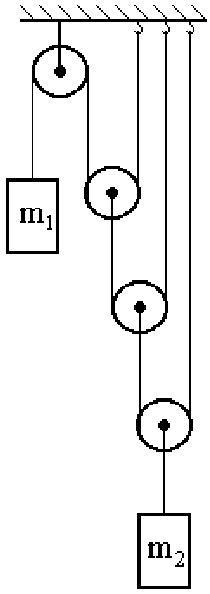


Рис. 71.

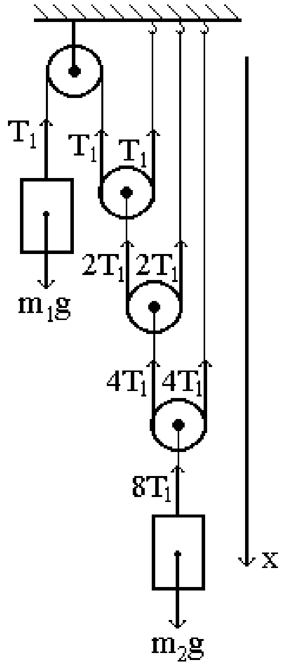


Рис. 72.

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$$

$$-m_2 a_2 = m_2 g - 8T_1$$

$$a_2 = \frac{1}{8} a_1$$

В результаті розв'язування системи одержано результати:

$$a_2 = g\,\frac{8m_1 - m_2}{64m_1 + m_2}; \quad a_1 = 8a_2 = 8g\,\frac{8m_1 - m_2}{64m_1 + m_2}.$$

Задача 115. За кінці перекинутої через нерухомий блок мотузки одночасно хапаються дві мавпи масами m_1=20 кг і m_2=25 кг. Легша мавпа просто тримається за мотузку, а масивніша прагне лізти вгору, залишаючись увесь час на сталій висоті. Через який час легша мавпа досягне блока, якщо спочатку містилася нижче від нього на l=19,6 м? Масами мотузки і блока знехтувати.

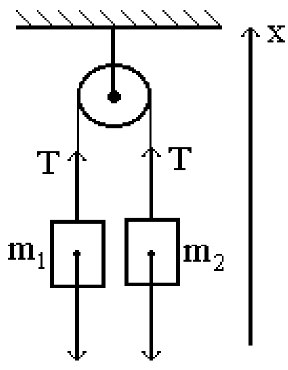


Рис. 73.

Розв'язок. На рис.73 вказано сили, прикладені до кожної з мавп, за якими записані рівняння другого закону Ньютона в проекції на вертикальну вісь, спрямовану в гору:

$$-m_1 g + T = m_1 a$$

$$-m_2 g + T = 0$$

Для прискорення легшої мавпи a в процесі розв'язування системи рівнянь одержано:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1} g .$$

За формулою шляху рівноприскореного руху з використанням виразу для прискорення маємо:

$$l = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1} \cdot \frac{t^2}{2} .$$

З останньої знаходимо шуканий час:

$$t = \sqrt{\frac{2l\, m_1}{(m_2 - m_1)y}}$$

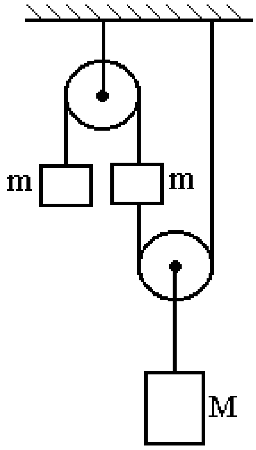


Рис. 74.

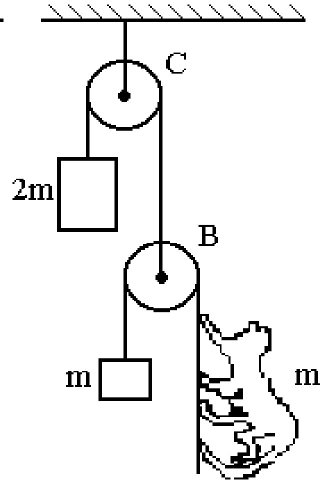


Рис. 75.

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 116. Визначити прискорення вантажу масою M у системі за рис. 74. Блоки й нитки невагомі, нитки нерозтяжні.

Відповідь: $a = \frac{Mg}{M + gm}$.

Задача 117. Мавпа масою m зрівноважена противагою на рухомому блоці B (рис. 75). Блок B зрівноважений вантажем масою 2 m на нерухомому блоці C. Спочатку система перебувала в спокої. З якою швидкістю піднімається вантаж масою 2 m, якщо мавпа почне вибирати мотузку з швидкістю v відносно себе. Масою обох блоків і тертям знехтувати.

Відповідь: вантаж підніматиметься із швидкістю $\frac{1}{4}$v.

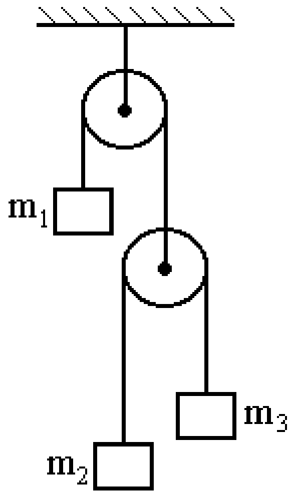


Рис. 76.

Задача 118. Знайти прискорення вантажів і натяги ниток у системі, зображеній на рис. 76, за умови $m_1 > m_2 + m_3$, $m_2 > m_3$.

Відповідь:

$$a = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot g$$

$$a_1 = \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot g$$

$$T = 2T_1 = \frac{8m_1m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot g$$

Задачі на космічну тематику

Олімпіадні задачі на космічну тематику нараховують кілька десятків. розв'язування значної їх частини потребує посилання до теоретичних питань, які виходять за межі шкільних базових курсів фізики і математики (закони Кеплера, властивості еліпса тощо). Корисно мати під руками таблиці основних астрономічних величин.

Задача 119. Показати, що період обертання супутника навколо планети в безпосередній близькості до її поверхні залежить лише від середньої густини планети.

Розв'язок. Період обертання супутника – це час T, протягом якого він здійснює один оборот навколо планети. Відповідно:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi(\mathrm{R} + \mathrm{h})}{\mathrm{v}}.$$

Для визначення виразу швидкості прирівняємо силу тяжіння і доцентрову силу, які діють на супутник:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{R_з + h} = \frac{GmM}{(R_з + h)^2} \;\to\; \mathrm{v} = \sqrt{\frac{GmM}{R_з + h}}.$$

Масу планети виразимо через добуток її об'єму на густину: $M = \frac{4}{3}\pi R_З^3\rho$.

Підставляємо вирази для швидкості і маси планети у формулу періоду і після спрощень одержуємо:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi(R_З + h)^3}{G\rho R_З^3}}$$

У безпосередній близькості до поверхні планети ($h \approx 0$): $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$.

Задача 120. Супутник системи телезв'язку запущено в площині земного екватора так, що він увесь час перебуває в зеніті однієї і тієї самої точки земної кулі. У скільки разів радіус R орбіти супутника більший за радіус Землі? ($R_З$=6400 км, прискорення вільного падіння біля поверхні Землі g= 9,8 $\frac{м}{с^2}$).

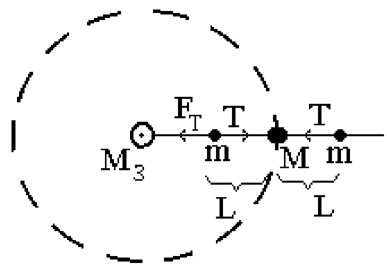


Рис. 77.

Розв'язок. Вираз для радіуса супутника R визначимо з рівності сил тяжіння і доцентрової, які на нього діють:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{GM}{v^2}.$$

За відомим періодом обертання супутника визначаємо його лінійну швидкість: $v = \frac{2\pi R}{T}$.

Використавши одержані вирази, знаходимо шукане відношення:

$$\frac{R}{R_З} = \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi R_З}} \approx 6{,}6$$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 121. По коловій орбіті навколо Землі поблизу її поверхні рухається космічна станція. Із станції у відкритий космос вийшов космонавт, прив'язаний до станції шнуром завдовжки L=63 *м*. При якому розміщенні космонавта, станції й Землі натяг шнура буде найбільшим? Визначить найбільшу силу натягу шнура. Маса космонавта 70 *кг*, у багато разів менша від маси станції M. Радіус Землі вважати рівним 6400 *км*.

Відповідь: T=$2 \cdot 10^{-2}$ H. Використайте рис. 78, для аналізу умови і визначення плану розв'язку.

Задача 122 . Визначити відношення маси Марса до Землі за параметрами орбіти автоматичної станції "Марс-2": максимальна відстань від поверхні (в епіцентрі) a= 25000 *км,* мінімальна (в перицентрі) p=1380 *км*, період обертання T=18 *год* 00 *хв*. Радіус Марса R =3400 *км*, радіус Землі R =6400 *км*.

Відповідь: $\frac{M_M}{M_З} = \frac{\pi^2 a_M^2}{2R_З^2 g T^2} \approx 0{,}11.$

Задача 123. У Сонячній системі є група комет, афелії яких містяться поблизу орбіти Юпітера – так зване сімейство Юпітера. При якому періоді обертання комети цього сімейства можуть перетинати орбіту Землі? Період обертання Юпітера T=11,86 *років*. Орбіти Землі і Юпітера вважати коловими.

Відповідь: $T_x < T_З\sqrt{\left(\dfrac{a}{R_0}\right)^3} \approx 5{,}4\,роки.$

Задача 124. Супутник рухається коловою орбітою на висоті h=760 *км* над поверхнею Землі. Його хочуть перевести на еліптичну орбіту з максимальною відстанню від поверхні Землі H=40000 *км* і мінімальною відстанню h= 760 *км*. На скільки для цього необхідно змінити швидкість супутника? Яким буде період обертання супутника новою еліптичною орбітою?

Відповідь: $\Delta\mathrm{v} = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}} \cdot \left\{\sqrt{\dfrac{2(R+H)}{2R+H+h}} - 1\right\} \approx 2365\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}};$

$$T = \pi(2R+H+h)\sqrt{\frac{2R+H+h}{2GM}} \approx 12{,}1\ \text{год.}$$

Задача 125. Орбітальна станція обертається навколо Землі на висоті 1600 км. З якою мінімальною швидкістю відносно станції з неї можна запустити космічний супутник Сонця ?

Відповідь: $\mathrm{v} = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot R\cdot\sqrt{\dfrac{g}{R+h}} \approx 2828{,}8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}.$

Елементи статики

При розв’язуванні задач зі статики варто прийняти до уваги умову рівноваги тіла: рівність нулю алгебраїчної суми прикладених до тіла моментів сил відносно любої вибраної точки ($\Sigma M_i = 0$). При розв'язуванні задачі складається система рівнянь до якої входять: рівняння проекцій другого закону Ньютона, спроектованого на вісі координат та рівняння суми моментів сил відносно вибраної точки. Такою точкою зручно вибрати точку прикладання невідомої сили, момент якої дорівнюватиме нулю – у рівнянні ця сила не фігуруватиме. Крім того необхідно врахувати правило знаків під час складання рівняння для моментів діючих сил. Оскільки момент сили є векторною величиною, визначення його модуля випливає за означенням як векторний добуток діючої сили на радіус-вектор точки прикладання цієї сили відносно початку обраної системи координат. Вивчення векторного добутку двох векторів виходить за рамки шкільної програми, а тому у шкільних підручниках, якщо виникає необхідність використовувати фізичні величини, що вводяться на основі векторного добутку, потребують методів і штучних правил за допомогою яких такими величинами можна оперувати (правило знаків для моментів сил, правило лівої руки, правило свердлика тощо).

При розв'язуванні задачі на статику окрім рівнянь моментів діючих сил складається система рівнянь до якої входять: рівняння проекцій другого закону Ньютона, спроектованого на вісі координат. Ці два типи рівнянь дають можливість повністю описати стан рівноваги досліджуваної механічної системи, або тіла.

Задача 126. Два тіла *A* і *B* з масами m_1=1,5 *кг* і m_2=0,45 *кг* підвішені на нитках до легкого коромисла, плечі якого мають довжину l_1=0,6 *м* і l_2=1 *м*, причому тіло *A* лежить на підлозі (рис. 78). На який мінімальний кут α слід відхилити підвіс тіла *B*, щоб після його відпускання тіло *A* відірвалося від підлоги ?

Розв'язок. Момент сили зі сторони тіла *B* створюватиме його вага та доцентрова сила. Відповідно правило моментів матиме вигляд:

$$m_1 g l_1 = l_2\left(m_2 g + \frac{m_2 v^2}{x}\right)$$

Вираз для $\frac{v^2}{x}$ знайдемо з рівняння рівності потенціальної енергії тіла *B* у крайньому відхиленому положенні його кінетичній енергії у найнижчій точці траєкторії

$$\frac{m_2 v^2}{2} = mgh, \quad де \quad h = x(1-\cos\alpha).$$

$$\frac{v^2}{x} = 2g(1-\cos\alpha).$$

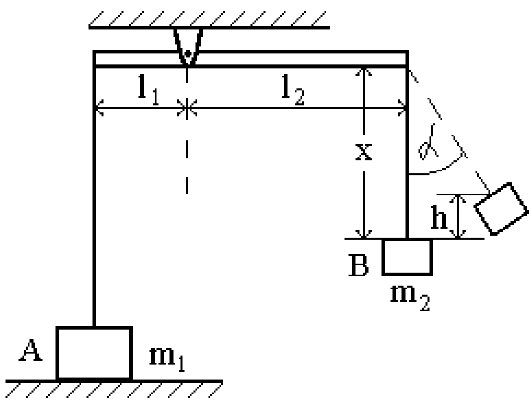


Рис. 78

Підставивши вираз до рівняння моментів, з останнього знаходимо значення кута :

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 + m_2 g l_2 \cdot 2(1-\cos\alpha).$$

Звідки $\cos\alpha = \frac{3l_2 m_2 - l_1 m_1}{2 l_2 m_2} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{l_1 m_1}{l_2 m_2}\right) = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 60^0.$

Задача 127. Тонка гнучка мотузка закріплена в точках *A* і *B* (рис. 79). Сила натягу мотузки в точці *A* дорівнює *T*. Кути α і β відомі. Визначити масу мотузки.

Розв'язок. Запишемо другий закон Ньютона для сил, прикладених до мотузки:

$$\vec{T}_A + \vec{T}_Б + m\vec{g} = 0.$$

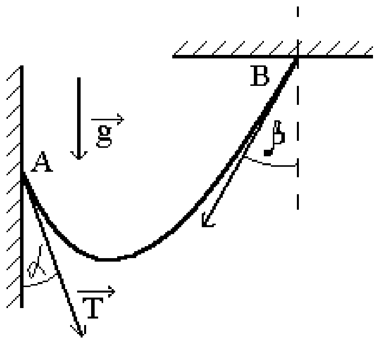


Рис. 79.

Спроектуємо одержане рівняння на вісі координат:

$$y: T_A \cos\alpha + T_B \cos\beta - mg = 0$$

$$x: T_A \sin\alpha - T_B \sin\beta = 0$$

Розв'язавши одержану систему відносно маси *m*, одержуємо:

$$m = \frac{T}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}.$$

Задача 128. Людина масою *m* вибирається драбиною масою *M*, приставленої до вертикальної стіни. Коефіцієнт тертя між драбиною і вертикальною стіною μ_1, а між драбиною і підлогою μ_2. При якому куті α між драбиною і вертикальною стіною людина зможе піднятися нагору?

Розв'язок. На драбину діють сили (Рис. 80): сила тяжіння *mg* ; сила *Mg*, з якою людина тисне на драбину піднявшись нагору; Q_1 – сила реакції стіни; Q_2 – сила реакції підлоги; $\mu_1 Q_1$ – сила тертя між драбиною і вертикальною стіною; $\mu_2 Q_2$ – сила тертя між драбиною і підлогою. Умова рівноваги драбини:

$$\sum F_i = 0 \quad або \quad m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \mu_1\vec{Q}_1 + \mu_2\vec{Q}_2 = 0$$

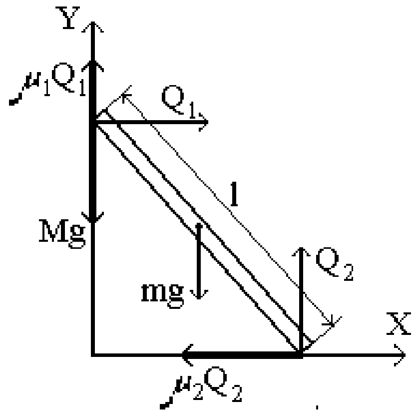


Рис. 80.

В проекціях на осі координат ця умова має вигляд:

$$x: \quad Q_1 - \mu_2 Q_2 = 0 \qquad (1)$$

$$y: \quad Q_2 + \mu_1 Q_1 - mg - Mg = 0 \qquad (2)$$

Запишемо суму моментів сил відносно точки *B*:

$$Mg\frac{l}{2}\sin\alpha + \mu_2 Q_2 l \cos\alpha - Q_2 l \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

Наводимо детальний хід розв'язку одержаної системи рівнянь відносно кута α між драбиною і вертикальною стіною:

З першого рівняння: $Q_1 = \mu_2 Q_2$, враховую це, з другого рівняння одержуємо: $Q_2 = \dfrac{g(M+m)}{1+\mu_1\mu_2}$. Цей вираз підставимо в третє рівняння і після спрощень маємо: $\text{ctg}\alpha \dfrac{\mu_2(M+m)}{1+\mu_1\mu_2} = \dfrac{M+m}{1+\mu_1\mu_2} - \dfrac{M}{2}$.

Звідси $ctg\alpha \geq \dfrac{1}{\mu_2}\left(1 - \dfrac{M(1+\mu_1\mu_2)}{2(M+m)}\right)$.

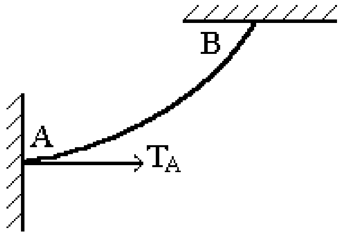


Рис. 81.

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 129. Сила натягу мотузки в точці *A* (рис. 81) *T*=20 *H* . Визначити масу мотузки.
Відповідь: *m*=3,2 *кг*.

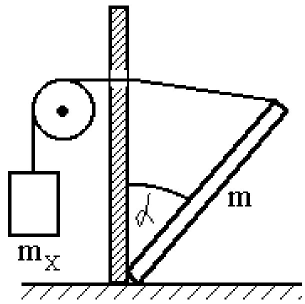


Рис. 82.

Задача 130. Стержень масою *m* одним кінцем упирається в кут між стіною й підлогою. В стіні на висоті, що дорівнює довжині стержня, просвердлено гладкий отвір, через який проходить нитка, прив'язана до верхнього кінця стержня. Другий кінець нитки перекинуто через блок і до нього підвішений вантаж (рис. 82). Якою має бути мінімальна маса вантажу, щоб стержень з будь-якого початкового положення завжди притискався до стіни?

Відповідь: $m_x \geq m\,sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{m}{2}$. Знак рівності відповідає нестійкій рівновазі при максимальному відхиленні на кут $\alpha = \dfrac{1}{2}\pi$.

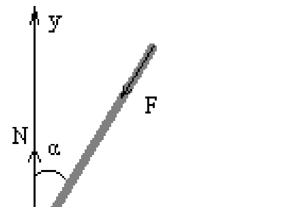


Рис. 83.

Задача 131. Циліндричний стержень вагою *P* притискують до підлоги, прикладаючи силу *F* вздовж напрямку стержня. Спочатку стержень розміщають вертикально, згодом його поступово нахиляють. При куті нахилу він зісковзує вздовж підлоги. Знайдіть коефіцієнт тертя спокою між матеріалами підлоги і стержня. Розглянути випадок коли сила *F* набагато більша від ваги стержня.

Відповідь: *OX:* $F_{тр}=F\sin\alpha$.

OY: $N=F\cos\alpha$.

$F_{тр}=\mu\, N = \mu\, F\cos\alpha = F\sin\alpha,$

$$\mu = \text{tg}\alpha$$

Задача 132. Однорідний стержень масою m=3 кг висить, утворюючи кут

$\varphi = 40^0$ з горизонтом (рис. 84). Яка сила діятиме на праву нитку в перший момент після розрізування лівої?

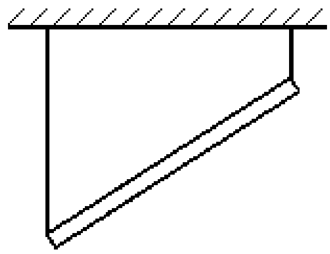


Рис. 84.

Відповідь: $T = mg\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\varphi\right)$.

Задача 133. На похилій площині знаходиться диск масою m=10 *кг*, який утримується в стані рівноваги за рахунок сил тертя і сили натягу нитки, намотаної на нього (рис. 85). Визначити натяг нитки, якщо кут нахилу площини до горизонту $\alpha_1 = 30^0$. Відношення діаметрів $\frac{d_2}{d_1} = 2$.

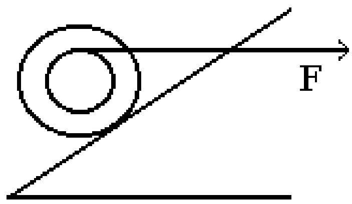


Рис. 85.

Відповідь: $F = \frac{d_2 mg\, sin\,\alpha}{d_2\, cos\,\alpha + d_1} \approx 36\ H$.

Задачі до теми „Закони збереження"

Переважна більшість задач до теми "Закони збереження" в процесі розв'язування кожної з них потребує використання законів збереження і імпульсу, і енергії. Досить часто приходиться визначати вирази для швидкостей тіл після їх взаємодії. Цей процес досить громіздкий. Ми пропонуємо виконати це один раз і в подальшому користуватись готовими формулами, наведеними нижче:

- після абсолютно не пружного співудару двох тіл (куль), вони рухаються як єдине тіло із швидкістю, яка визначається за формулою:

$$U = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- якщо удар абсолютно пружний, то одержані швидкості визначаються за формулами:

$$U_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \qquad U_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Застосовуючи закон збереження енергії, корисно пам'ятати, що потенціальну енергію тіл не обов'язково відраховувати від її значення на поверхні Землі. Рівень відліку доцільно вибирати, виходячи з конкретних умов задачі.

Якщо тіла рухаються вздовж однієї прямої, то векторні величини можна замінити на їх складові, розглядаючи останні як скалярні величини.

Задача 134. У шкільному досліді і "мертвою петлею" (рис. 86) вважати відомими m, l, R і α. Коефіцієнт тертя на всіх ділянках шляху дорівнює μ. Визначити роботу сил тертя на шляху від основи похилої площини до верхньої точки петлі. У верхній точці петлі сила тертя дорівнює нулю.

Розв'язок. В точці 1 повну енергію тіла складала лише потенціальна енергія

$$W = mgl\sin\alpha$$

При переході в точку 2 вказана енергія частково перейшла в кінетичну, а решта витратилась на роботу сили тертя на ділянці *l*:

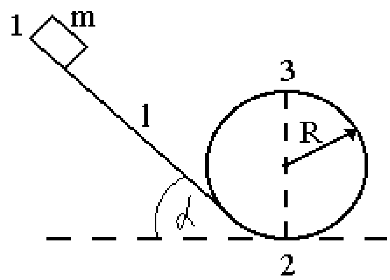


Рис. 86.

$$mgl\sin\alpha = \frac{mv_2^2}{2} + \mu mgl\cos\alpha \qquad (1)$$

В точці *B* повну енергію тіла складали кінетична і потенціальна. В сумі вони менші за повну енергію тіла в точці 2 на роботу сили тертя на ділянці 2 - 3.

$$\frac{mv_2^2}{2} - A_T = \frac{mv_3^2}{2} + mg2R \qquad (2)$$

За умови, що в точці 3 сила тертя рівна нулеві, можна записати

$$mg = \frac{mv_3^2}{R}. \qquad (3)$$

Враховуючи (1), (2) і (3) для шуканої роботи сили тертя одержуємо:

$$A = mgl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{5}{2}mgR.$$

Задача 135. Куля масою *m*=9 *г*, маючи швидкість *m*=160 *м/с*, напрямлену під кутом α= 30^0 до горизонту (рис. 87), пробиває дошку масою m_2=0,3 *кг*, яка лежала на підставках. Після цього куля піднімається на максимальну висоту *H*=45 *м* над рівнем підставок. На яку висоту підстрибне дошка?

Розв'язок. Систему рівнянь складають:

1) закон збереження імпульсу для системи "куля-дошка":

$$m_1v_0 = m_2v + m_1v_1$$

2) закон збереження механічної енергії для дошки:

$$\frac{m_2v_1^2}{2} \cdot \sin^2\alpha = m_2gH$$

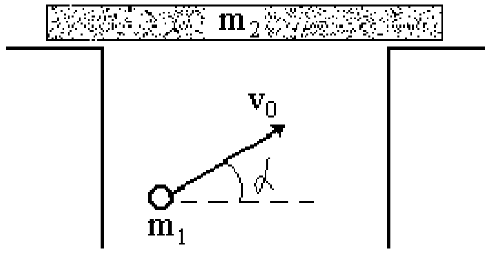


Рис. 87.

3) закон збереження механічної енергії для кулі після пробивання дошки:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha = m_1 g H$$

Розв'язавши систему, для h дошки знаходимо:

$$h = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{\left(v_0 \sin \alpha - \sqrt{2gH}\right)^2}{2g}$$

Задача 136. Куля, яка летить горизонтально, влучає в дерев'яний кубик, закріплений на платформі, що може рухатись горизонтально. Визначити швидкість кулі, якщо вона застряє в кубику. Маса кулі m, платформи з кубиком M. Платформа долає шлях l, коефіцієнт тертя між платформою і підлогою μ.

Розв'язок. Відповідно до умови закон збереження імпульсу має вигляд:

$$m v = (m + M) v$$

Робота по подоланню сили тертя виконана за рахунок зміни кінетичної енергії системи: $\frac{(m+M)v^2}{2} = \mu g l (m + M).$

Розв'язавши одержану систему рівнянь, для швидкості кулі одержуємо:

$$v = \frac{(m+M)\sqrt{2g\mu l}}{m}.$$

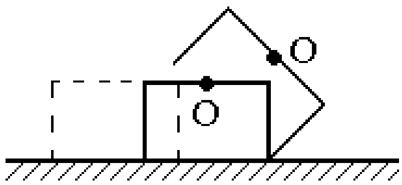


Рис. 88.

Задача 137. Табуретку на чотирьох ніжках висотою а з квадратним сидінням, сторона якого $2a$, нахиляють так, що вона спирається на підлогу двома ніжками (рис. 88), і відпускають, після чого вона падає на всі чотири ніжки. Оцініть, на яку відстань вона пересунеться по підлозі, якщо коефіцієнт тертя ковзання ніжок по підлозі μ. Удар по підлозі абсолютно не пружний. Вважайте, що вся маса табуретки зосереджена в центрі мас O сидіння.

Розв'язок. Для оцінки вважатимемо, що вся потенціальна енергія системи

$$mgh = mga(\sqrt{2} - 1)$$

перетворюється у внутрішню внаслідок дії сили тертя. При ковзанні табуретки по підлозі $A_{тр} = \mu m g x$,

отже $mga(\sqrt{2} - 1) = \mu m g x$,

звідси отримаємо: $x = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\mu}$.

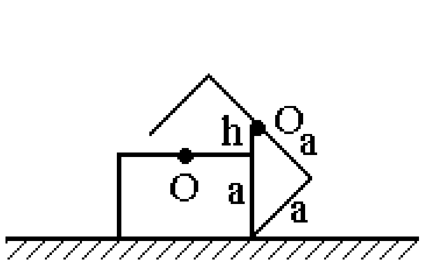


Рис. 89.

Для проведення точнішої оцінки скористаємось законом збереження енергії і визначимо кутову швидкість табуретки у момент удару:

$$mgh = \frac{I_0\omega^2}{2}, \text{ звідси } \omega^2 = \frac{2mgh}{I_0} \qquad (1)$$

$$h = a(\sqrt{2}-1),$$

$$I_0 = I_c + 2ma^2 = \frac{4}{12}ma^2 + 2ma^2 = \frac{7}{3}ma^2. \qquad (1a)$$

$$\omega^2 = \frac{a(\sqrt{2}-1)g}{7a}. \qquad (2)$$

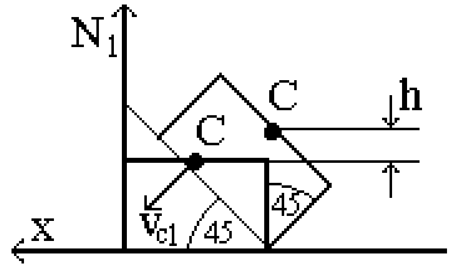


Рис. 91.

У момент удару виникне ударна реакції N_1, момент якої $2aN_1$ гальмуватиме обертання. Запишемо закон динаміки для обертального руху через зміну моменту імпульсу тіла: $M\Delta t = \Delta L$, звідси $2aN_1\Delta t = I_0\omega$ (3)

Запишемо другий закон Ньютона для поступального руху в момент удару:

$$F_{\text{тр}1}\Delta t = \mu N_1\Delta t = \Delta p = m(\text{v}_{c1x} - \text{v}_{c2x})$$

$$\text{v}_{c1x} = \text{v}_{c1x}\, cos\,\alpha = \omega\alpha\sqrt{2}\, cos\,\alpha.$$

З (3) отримаємо: $N_1\Delta t = \dfrac{I_0\omega^2}{2a}$.

Підставимо (5) в (4), врахувавши (1а) :

$$\text{v}_{C1X} - \frac{\mu I_0\omega}{2am} = \text{v}_{C2X} = \omega a\sqrt{2}\, cos\,\alpha - \frac{\mu I_0\omega}{2am} = \omega\left(a\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\mu I_0}{2am}\right) = \frac{\omega a}{2}\left(\sqrt{6} - \frac{7\mu}{3}\right).$$

При $\mu = \dfrac{3\sqrt{6}}{7}$, $v_{C2X} = 0$ - табуретка не пересунеться. При: $\mu < \dfrac{3\sqrt{6}}{7}$:

$$S = \frac{v_{C2X}^2}{2\mu g} = \frac{\omega^2 a^2}{2\mu g}\left(\sqrt{6} - \frac{7}{3}\mu\right) = \frac{3\left(\sqrt{6} - 7\frac{\mu}{3}\right)^2 a(\sqrt{2}-1)}{7\mu}.$$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 138. Кульку, підвішену на нитці довжиною l, відхиляють так, що нитка витягується горизонтально. Визначити максимальну висоту підйому кульки після абсолютно пружного відбивання від підлоги. Вважати, що $l>h$.

Відповідь: $H = \dfrac{v^2}{2g}\sin^2\alpha = \dfrac{v^2}{2g}(1-\cos^2\alpha) = h\left(1 - \dfrac{h^2}{l^2}\right).$

Задача 139. Тролейбус масою m=12·10^3 *кг* на горизонтальній дорозі збільшив швидкість від v_1=5 *м/с* до v_2=10 *м/с*. Двигун тролейбуса розвивав потужність N=60 *кВт*. Нехтуючи опором рухові, визначити максимальне і мінімальне прискорення тролейбуса на цій ділянці.

Відповідь: $a_{\max} = \dfrac{N}{m\mathrm{v}_1} = 1\,\dfrac{м}{c^2}$; $a_{\min} = \dfrac{N}{m\mathrm{v}^2} = 0{,}5\,\dfrac{м}{c^2}$.

Задача 140. Реактивний візок масою m, робить "мертву петлю" по вертикальній коловій доріжці радіуса R із швидкістю v. Яка робота виконується силою тертя при переміщенні візка з нижнього положення в найвище? Коефіцієнт тертя μ.

Відповідь: $A = m\mu\pi R\left(\dfrac{v^2}{R} - g\right)$

Задача 141. Сферичне тіло масою M лежить на дуже тонкій підставці. Знизу в тіло влучає куля масою m, що летіла з швидкістю v вертикально вгору, і пробиває тіло наскрізь. Тіло підстрибує на висоту h. На яку висоту h_1 підніметься куля над підставкою?

Відповідь: $h_1 = \dfrac{\left(m\mathrm{v} - M\sqrt{2gh}\right)^2}{2gm^2}$.

Задача 142. Куля летить горизонтально з швидкістю v_0=510 $\dfrac{м}{c}$ і влучає в ящик, який лежить на горизонтальній поверхні на відстані d=0,05 *м* від стіни будинку. Пробивши ящик, куля вилітає в тому самому напрямі з швидкістю v=10 $\dfrac{м}{c}$. Ящик починає рухатися до стіни. Чи вдариться ящик об стіну? Коефіцієнт тертя між ящиком і поверхнею μ=0,1, маса M=10 *кг*, маса кулі m=10 *г*.

Відповідь: $l = \dfrac{\mathrm{v}_1^2}{2\mu g} = \dfrac{m^2(\mathrm{v}_0 - \mathrm{v})^2}{2M^2\mu g} = 0{,}125(м)$.

Оскільки $l > d$, то ящик удариться об стіну.

Задача 143. Покладена на верхній кінець спіральної пружини гиря стискає її на Δl. На скільки стисне пружину ця гиря, кинута вниз із початковою швидкістю v_0 з висоти H?

Відповідь: $x = \Delta l + \sqrt{\Delta l^2 + 2\Delta l h + \dfrac{\mathrm{v}_0^2 \Delta l}{g}}$.