МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

Задачі з даного розділу згруповано за подібністю змісту та схожістю методів розв'язування. Широко використовуються питання інших розділів. До графічних задач виконання графіків потребує ретельності до дотримання масштабу. Запропоновані за умовами спрощення потребують оцінки точності одержаних результатів.

Основи молекулярно-кінетичної теорії газів. Основне рівняння МКТГ

Задача 150. В ампулі при $0°C$ міститься азот під тиском P=1,3·10^{-4} *Па*. Скільки молекул газу міститься в 1 см^3 при такому тиску?

Розв'язок: Кількість молекул визначається за формулою

$$N = \nu N_2,$$

для якої кількість речовини визначається за рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$\nu = \frac{PV}{RT}.$$

За розв'язком системи для визначення N одержується:

$$N = \frac{PVN_A}{RT} = \frac{PV}{kT} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{см}^{-3}.$$

Задача 151. Оцінити розмір і масу молекули води, спирту й ртуті. Хімічна формула спирту C_2H_5OH, його густина 790 *кг/м*^{3}.

Відповідь: $d = \sqrt[3]{\frac{V}{N_A}} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}$; для спирту $d_1 \approx 4{,}6 \cdot 10^{-8}$ *см*; ртуті $d_2 \approx 2{,}3 \cdot 10^{-8}$ *см*; для води $d_3 \approx 3 \cdot 10^{-8}$ *см*. Маса молекули спирту $m_1 = 7{,}8 \cdot 10^{-26}$ *кг*; ртуті $m_2 \approx 3{,}3 \cdot 10^{-26}$ *кг*; води $m_3 = 3 \cdot 10^{-26}$ *кг*.

Задача 152. Куб з ребром довжиною ℓ рухається зі швидкістю v ($v << \sqrt{\frac{3kT}{m}}$) в ідеальному газі частинок масою m у напрямку, перпендикулярному до однієї з його граней. Температура газу T, тиск p. Оцініть силу опору з якою газ діє на куб.

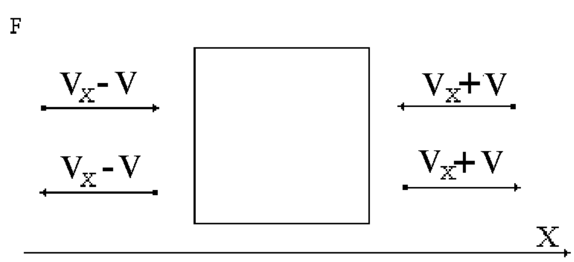


Рис. 92.

Розв'язок: Розглянемо куб у системі відліку Земля: Сила опору F_0 дорівнює різниці сил тиску газу на передню і задню стінки куба:

$$F_0 = F_1 - F_2.$$

Визначимо сили тиску на вказані стінки, для цього перейдемо до системи відліку, зв'язаної з кубом (рис 92). Кількість зіткнень з передньою стінкою визначиться за формулою:

$$z_1 = \frac{1}{2} nS(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})t.$$

Зміна імпульсу однієї частинки: $\Delta p_{1x} = 2(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})m.$

(якщо розглянути строгіше, то частинки відлітають не зі швидкістю $(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})$, а зі швидкістю v_x, відповідної температурі куба).

Тоді сили: $$F_1 = \frac{z_1 \Delta p_{1x}}{t} = \frac{nS(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})t \cdot 2(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})m}{2t} = mnS(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})^2,$$

$$F_2 = mnS(\mathrm{v}_x - \mathrm{v})^2.$$

Підставимо вирази для сил F_1 і F_2 до робочої формули:

$$F_{on} = mnS[(\mathrm{v}_x + \mathrm{v})^2 - (\mathrm{v}_x - \mathrm{v})^2] = 4mnS\mathrm{v}_x\mathrm{v} = 4mnS\mathrm{v}\sqrt{\frac{RT}{M}} =$$

$$= 4mn\mathrm{l}^2\mathrm{v}\sqrt{\frac{RT}{M}} = 4m\frac{p}{kT}\mathrm{l}^2\mathrm{v}\sqrt{\frac{RT}{M}} = 4p\mathrm{l}^2\mathrm{v}\sqrt{\frac{m}{kT}},$$

де p – тиск газу.

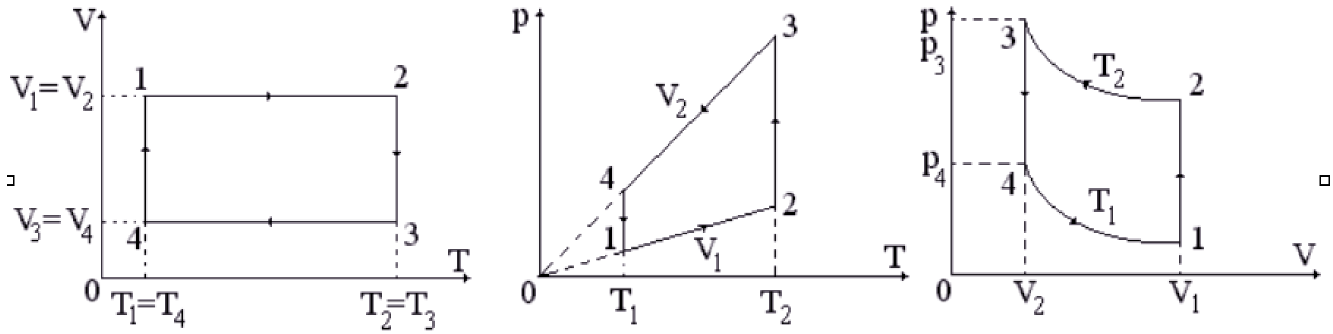
Задачі для самостійного розв'язку

Задача 153. Пучок молекул із швидкістю u падає на стінку, яка рухається зі швидкістю v у напрямі руху молекул. Пучок молекул пружно відбивається від стінки, створюючи тиск p на неї. Визначити концентрацію молекул n_0 у пучку, якщо маса молекул m.

Відповідь: $n_0 = \dfrac{p}{2m(u - \mathrm{v})^2}.$

Задача 154. Над молем ідеального газу здійснили замкнутий процес**,** який складається із двох ізохор і двох ізотерм (рис. 93 а). Накреслити цей процес у координатах p, V і p, T.

Відповідь: (рис. 93 а, б). 1-2 – ізохора; 2-3 – ізотерма; 3-4 – ізохора; 4-1 – ізотерма.

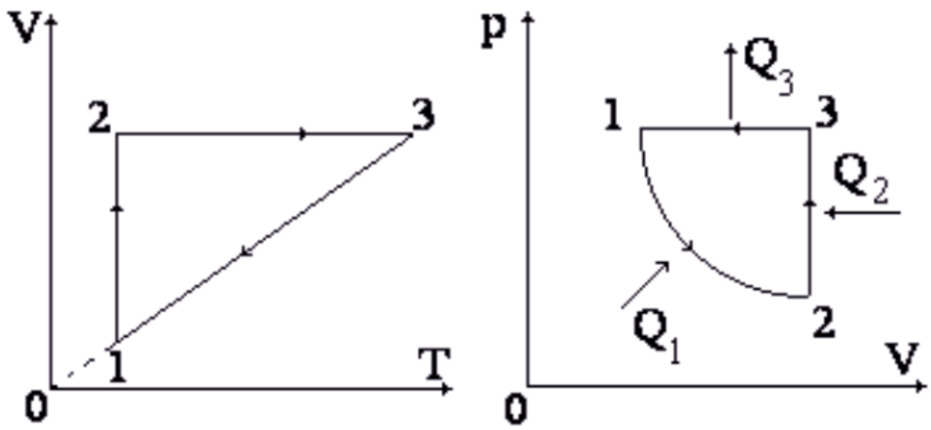


а)   б)   в)

Рис. 93.

Задача 155. Зміни стану газу в циліндрі під поршнем при певному круговому процесі показані на рис. 94 а. Зобразити ці зміни стану в координатах *p, V*, вказавши, на яких ділянках графіка газу надається певна кількість теплоти, а на яких газ віддає теплоту.

Відповідь: (рис. 94 а). При переході із стану 1 в стан 2, а потім у стан 3 газ отримує теплоту. При переході із стану 3 в стан 1 – охолоджується.



а)   б)

Рис. 94.

Закони ідеального газу

Задача 156. На скільки градусів слід нагріти повітря в повітряній кулі, щоб вона полетіла? Об'єм оболонки кулі V=525 *м*^{3}, маса m=10 *кг*. Атмосферний тиск p=765 *мм. рт. ст.*, температура навколишнього повітря t_0=27°*C*. Молярна маса повітря M=29·10^{-3} *кг/моль*. Оболонка кулі нерозтяжна і має в нижній частині невеликий отвір.

Розв'язок: Шукана величина – це різниця температур повітря в кулі T_1 і навколишнього повітря T_0:

$$T_x = T_1 - T_0. \qquad (1)$$

Куля полетить за умови, коли архімедова сила почне перевищувати вагу кулі разом з вагою нагрітого в ній повітря:

$$\rho_x gV = mg + m_{нп} g. \qquad (2)$$

Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона для нагрітого і холодного повітря об'ємом *V*.

$$pV = \frac{m_{\text{нп}}}{M} RT_1, \qquad (3)$$

$$pV = \frac{m_{\text{хп}}}{M} RT_0. \qquad (4)$$

З (3) визначимо масу нагрітого повітря, а з (4) – густину холодного:

$$m_{\text{нп}} = \frac{pVM}{RT_1}; \quad \rho_{\text{хп}} = \frac{pM}{RT_0}.$$

Розв’язавши рівняння (2) із врахуванням виразів для $m_{\text{нп}}$ і $\rho_{\text{хп}}$ відносно T_1, маємо:

$$T_1 = \frac{pVMT_0}{pVM - mRT_0}.$$

Для T_x одержуємо:

$$T_x = \frac{mR{T_0}^2}{MpT_0 - mRT_0} \approx 5\ K.$$

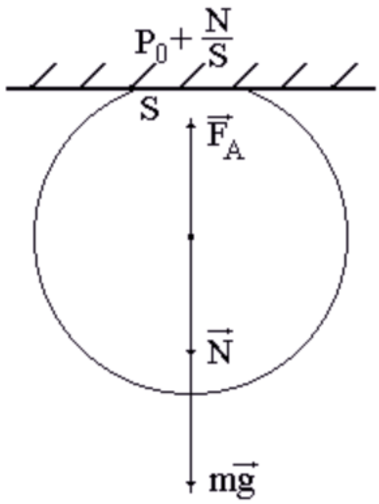


Рис. 95.

Задача 157. Гумова куля, яка вміщує 10^{-4} *кг* водню при тиску 1,05 *атм*, піднімається в кімнаті до стелі. Знайдіть площу дотику гумової кулі до стелі. Масою оболонки кулі знехтуйте.

Розв’язок: Для об’єму кулі за *T*=300 *K* маємо:

$$V_k = \frac{m_{\text{в}} RT}{M_{\text{в}} p_{\text{в}}}.$$

Сила реакції стелі – це різниця між архімедовою силою та вагою кулі:

$$N = F_{\text{А}} - m_{\text{в}} g = \rho_n gV - m_{\text{в}} g =$$

$$= \frac{p_0 M_{\text{п}}}{RT} g \frac{m_{\text{в}} RT}{M_{\text{в}} p_{\text{в}}} - m_{\text{в}} g = m_{\text{в}} g \left(\frac{p_0 M_{\text{п}}}{M_{\text{в}} p_{\text{в}}} - 1\right).$$

За рівнянням Менделєєва-Клапейрона визначаємо густину повітря:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{p_0 M_{\text{п}}}{RT},$$

де $M_{\text{п}}$ і $M_{\text{в}}$ – відповідно молярні маси повітря і водню.

Поверхня кулі у місці дотику плоска (рис. 95), току сила реакції опори розподілена рівномірно:

$$p_0 + \frac{N}{S} = p_в.$$

Отже,

$$S = \frac{N}{p_в - p_0} = \frac{m_в g}{p_в - p_0}\left(\frac{p_0 M_п}{p_в M_в} - 1\right) = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\, м^2.$$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 158. Кулька, заповнена гелієм на поверхні Землі p_0, має об'єм V_0 Кульку відпустили. На висоті, де тиск удвічі менший, кулька збільшила об'єм на 25% і тріснула. Яку максимальну напругу витримує матеріал оболонки кульки? Оболонка виготовлена з еластичного матеріалу, густина якого практично не залежить від розтягу і дорівнює ρ. Маса оболонки m. Вважати температуру всюди однаковою. Кулька зберігає сферичну форму.

Відповідь: $\sigma_M = \dfrac{9\rho p_0 V_0}{16m}$.

Задача 159. У балоні об'ємом V=100 *л* під тиском p=1,01·10^7 *Па* міститься водень, яким заповнюють метеорологічні кулі-зонди з м'якою оболонкою. Кожна куля-зонд повинна мати підіймальну силу F=20 *Н*. Скільки куль можна заповнити воднем з одного балона? Температура водню в балоні і кулях дорівнює температурі навколишнього повітря T=300 *К*.

Відповідь: n=5 куль.

Задача 160. Герметична куля-зонд, виготовлена з матеріалу, що не розтягується, має підняти апаратуру масою М=10 *кг* на висоту близько 5,5 *км*, де густина повітря вдвічі менша, ніж біля поверхні Землі. Кулю наповнюють гелієм при T=300 *К* і p=1 *атм*. Об'єм кулі V=100 *м*^{3}. Визначити масу 1 м^3 матеріалу оболонки кулі.

Відповідь: $m = \dfrac{\left(\frac{1}{2}M_п - M_г\right)\frac{pV}{RT} - M}{4\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}} = 0{,}3\,\dfrac{кг}{м^3}.$

Ідеальний газ у посудині із непроникним поршнем

Задача 161. У вертикально закритому циліндрі можуть переміщуватись без тертя поршні (рис. 96). Частини А, В і С посудини містять однакове число молів ідеального газу. При температурі, однаковій в усьому циліндрі, відношення об'ємів V_A:V_B:V_C=5:3:1. Температура газу змінюється і нове відношення об'ємів стає V_A':V_B':V_C'=x:2:1. Визначити x. У скільки разів змінилася температура?

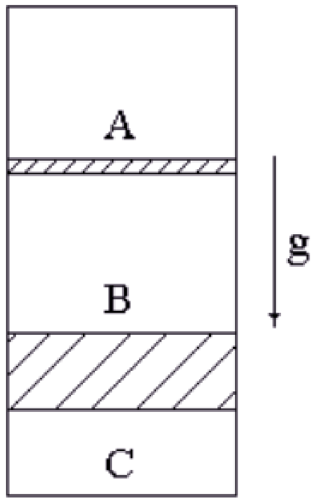


Рис. 96.

Розв'язок: За умови для рівних мас газу і однакових температур T_1 маємо:

$$p_A V_1 = p_B V_2 = p_C V_3$$

або

$$5p_A = 3p_B = p_C.$$

Тиск у частині С (p_C) більший тиску у частині B (p_B) на величину тиску, спричиненого вагою нижнього поршня p_H

$$p_C = p_B + p_H.$$

Аналогічно для p_A, p_B і тиску спричиненого верхнім поршнем маємо:

$$p_B = p_A + p_B.$$

За одержаними рівняннями знаходимо співвідношення між тисками, p_H і p_B, спричиненими поршнями:

$$p_H = \frac{10}{3} p_A, \quad p_B = \frac{2}{3} p_A, \quad \textit{звідки} \quad \frac{p_H}{p_B} = 5.$$

Для тисків частин газу за температури T_2 знаходимо:

$$p_H = p_B', \quad p_B = \frac{p_B'}{5},$$

$$p_A' = \frac{4}{5} p_B' \Rightarrow p_A' = \frac{4}{5} p_1$$

$$p_A' \cdot x = 2p_B'$$

звідки

$$x = 2{,}5.$$

Виразимо p_A' через p_H, а V_1 і V_1' через загальний об'єм V:

$$V_1 = \frac{5}{9}V, \quad V_1' = \frac{5}{11}V.$$

З рівняння стану газу для частини С одержуємо:

$$\frac{\frac{3}{10} p_H \cdot \frac{5}{9}V}{T_1} = \frac{\frac{4}{5} p_H \cdot \frac{5}{11}V}{T_2}$$

або

$$T_2\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\right)=T_1\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{11}\right),$$

звідки

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{24}{11}.$$

Задача 162. У довгій трубці між двома поршнями маси m кожний знаходиться n молів ідеального одноатомного газу, маса якого, значно менша від маси поршнів. Початкова температура газу T_0. У решті трубки

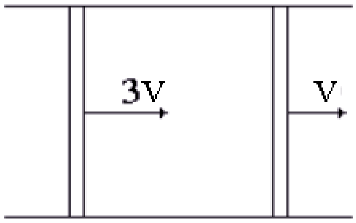


Рис. 97.

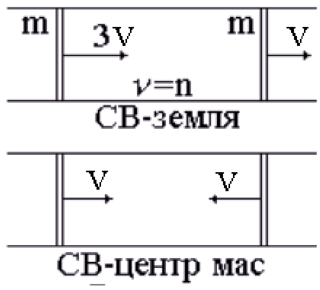


Рис. 98.

– вакуум. У початковий момент правий поршень має швидкість v, а лівий – 3v. Поршні рухаються праворуч (рис. 97). Знайдіть максимальну температуру газу. Система теплоізольована. Теплоємністю трубки та поршнів знехтуйте.

Розв'язок: Нехтуючи масою газу, визначимо швидкість руху центра мас системи:

$$\mathrm{v}_C=\frac{m\mathrm{v}+3m\mathrm{v}}{2m}=2\mathrm{v},$$

$$\mathrm{v}_C=2\mathrm{v}.$$

Відносно центра мас (рис. 98) поршні мають однакові за модулем і протилежно направлені швидкості. В момент зупинки поршнів температура газу буде максимальною, оскільки вся кінетична енергія поршнів перейде у внутрішню:

$$2\cdot\frac{m\mathrm{v}^2}{2}=\Delta U=\frac{3}{2}\nu R(T-T_0),$$

звідки

$$T=T_0+\frac{2m\mathrm{v}^2}{3\nu R}.$$

Задача 163. У вертикальному циліндрі під поршнем масою M, що може ковзати без тертя, перебуває газ. Відстань від поршня до дна циліндра h. Якою буде відстань поршня від дна циліндра, якщо циліндр рухатиметься вертикально вгору з прискоренням a, а температура газу залишиться незмінною?

Розв'язок: За умови рівноваги у початковому стані (рис. 99):

$$p_1 S = Mg. \qquad (1)$$

Запишемо для поршня другий закон Ньютона в проекції на вертикально вгору спрямовану вісь:

$$Ma = p_2 S - Mg,$$

звідки

$$p_2 S = M(a + g). \qquad (2)$$

Для ізотермічного процесу:

$$p_1 hS = p_2 h_2 S. \qquad (3)$$

З рівнянь (1), (2) і (3) маємо:

$$Mgh = M(a + g)h_2,$$

звідси

$$h_2 = \frac{a}{a+g}h.$$

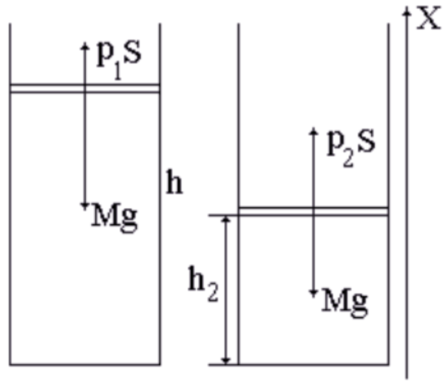


Рис. 99.

Задача 164. На деякій планеті 80% маси атмосфери складає кисень, а 20% - неон. Визначте середню молярну масу атмосфери планети.

Розв'язок:

80% - m_1 20% - m_2 $M_1 = 16\cdot10^{-3}$ *кг/моль* $M_2 = 20\cdot10^{-3}$ *кг/моль* M_c - ?	$M_c = \frac{m}{\nu}$ $m = m_1 + m_2$ $m_2 = \frac{m_1}{4}$ $m = m_1 + \frac{m_1}{4} = \frac{5m_1}{4}$ $\nu = \nu_1 + \nu_2$ $\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}$ $\nu_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{m_1}{4M_2}$ $\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_1}{4M_2} = m_1\left(\frac{4M_2 + M_1}{4M_1M_2}\right)$	$M_c = \frac{5m_1 \cdot 4 \cdot M_1 \cdot M_2}{4 \cdot m_1 \cdot (4M_2 + M_1)} =$ $= \frac{5 \cdot M_1 \cdot M_2}{4M_2 + M_1}$ $M_c = \frac{5\cdot16\cdot10^{-3}\cdot20\cdot10^{-3}}{(4\cdot20+16)\cdot10^{-3}} =$ $= 16{,}6\cdot10^{-3}(кг/моль)$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 165. Циліндр (рис. 100) довжиною ℓ перегороджений посередині тонким поршнем, маса якого m. У кожному відділенні міститься по одному молю ідеального газу при температурі T. Поршень трохи змістився від середини циліндра. Визначити період малих коливань поршня, вважаючи, що вони пов'язані із ізотермічними процесами в газі.

Відповідь: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell^2}{8RT}}=\pi\sqrt{\dfrac{m\ell^2}{2RT}}$.

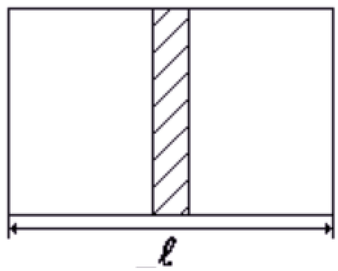


Рис. 100.

Задача 166. У теплоізольованій посудині висотою H=0,5 м міститься m=0,1 г гелію при T_0=100 К. На дні посудини лежить поршень масою М=10 кг. Посудину швидко перевертають, так що поршень виявляється зверху. На якій висоті перебуватиме поршень після того, як його рух припиниться? Теплоємністю посудини знехтувати.

Відповідь: $h=0{,}4H+\dfrac{3\nu RT_0}{5Mg}\approx 0{,}32$ м.

Задача 167. Під масивний поршень, який ковзає без тертя у вертикальному циліндрі, із якого відкачали повітря, вводять суміш водню й гелію, і поршень розміщується посередині циліндра. З часом поршень зміщується вниз, оскільки він виявився проникним для гелію. Нове положення рівноваги поршня розміщене на третині висоти циліндра. Яке відношення мас гелію і водню в суміші?

Відповідь: $\dfrac{m_г}{m_в}=\dfrac{M_г}{2M_в}=1$.

Задача 168. Вертикальний циліндр з ν молів ідеального одноатомного газу закрито зверху поршнем масою M і площею S. Спочатку поршень утримувався нерухомим, і газ займав об'єм V_0 і мав температуру T_0. Поршень звільнили, і після кількох коливань він повернувся до стану спокою. Нехтуючи силами тертя, теплоємністю поршня й циліндра, визначити температуру та об'єм газу при новому положенні поршня. Вся система теплоізольована. Атмосферний тиск p_a.

Відповідь: $T=\frac{3}{5}T_0+\frac{2\left(p_a+\frac{Mg}{S}\right)V_0}{5\nu R}$; $V=\frac{3}{5}V_0+\frac{3\nu RT_0}{5\left(p_a+\frac{Mg}{S}\right)}$.

Ідеальний газ у посудині із непроникною перегородкою

У наступній групі задач розглядаються процеси, які відбуваються в ємностях із напівпроникною перегородкою. Як і задачі попередніх груп їх можна розв’язати без застосування основ термодинаміки. Це дозволяє включати їх до програм олімпіадних завдань для учнів 10-х класів, які проводяться раніше за вивчення основ термодинаміки.

Задача 169. Закрита посудина розділена на рівні частини твердою нерухомою напівпроникною перегородкою. В першу половину впустили суміш аргону й водню при p=1,5·10^5 Па, а в другій половині – вакуум. Через перегородку може дифундувати лише водень. Після закінчення процесу дифузії тиск у першій половині виявився p'=10^5 Па. Визначити відношення мас аргону й водню в посудині. Молярна маса аргону $M_а$=20·10^{-3} кг/моль, водню $M_в$=2·10^{-3} кг/моль. Температура під час процесу підтримувалася сталою.

Розв’язок: Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона для аргону та водню до дифузії і після її закінчення:

$$p_а=\frac{2m_а}{M_аV}RT;\quad p_в=\frac{2m_в}{M_вV}RT;$$

$$p_в'=\frac{m_в}{M_вV}RT.$$

Тиск p складають тиски аргону і водню до дифузії:

$$p=\frac{2RT}{V}\left(\frac{m_а}{M_а}+\frac{m_в}{M_в}\right). \qquad (1)$$

Тиск p' складають: тиск аргону і тиск водню після дифузії:

$$p'=\frac{RT}{V}\left(\frac{2m_а}{M_а}+\frac{m_в}{M_в}\right). \qquad (2)$$

Розділивши (1) рівняння на (2), після ряду спрощень для відношення мас аргону і водню одержуємо:

$$\frac{m_а}{m_в} = \frac{M_а(2p'-p)}{2M_в(p-p')}.$$

Задача 170. Однакові за масою кількості водню і гелію помістили в посудину об’ємом V_1, відокремлену від порожньої посудини об’ємом V_2 напівпроникною перегородкою, яка пропускає молекули водню і не пропускає молекули гелію. Після встановлення рівноваги тиск у першій посудині зменшився в 2 рази. Визначити відношення $\frac{V_2}{V_1}$.

Відповідь: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_1 + M_2}{M_1 - M_2}$.

Задача 171. Посудина об’ємом $2V$=20 л розділена на дві рівні частини напівпроникною нерухомою перегородкою з паладію. В одну половину введено $m_а$=20 г аргону, в другу – $m_в$=2 г водню. Через паладієві перегородки може проникати лише водень. Який тиск встановиться в обох половинах посудини після закінчення процесу дифузії? Температура в першій половині посудини T_1=300 *К*, у другій – T_2=600 К.

Відповідь: Після встановлення рівноваги тиск суміші аргону й водню в першій половині дорівнюватиме $p_1 = \left(\frac{m_в}{M_в}A + \frac{m_а}{M_а}\right)\frac{RT_1}{V} = 2{,}7 \cdot 10^5$ Па, а тиск у другій половині – p_2=(1-A)$\frac{m_в RT_2}{\mu_в V} = 2 \cdot 10^5$Па, де A=$\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \approx 0{,}6$

$$A = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \approx 0{,}6.$$

Задача 172. У посудині довжиною 2ℓ=2 м поршень з’єднано з днищами пружинами жорсткістю K=1493 Н/м кожна (рис. 101). Спочатку в посудині був вакуум, пружини не деформовані. На яку відстань зміститься поршень, якщо в одну з частин посудини ввести 28 г азоту? Температура підтримується рівною T=273 К.

Розв’язок: Зміщення поршня після введення азоту припиниться за умови, коли сила пружності деформованих пружин зрівноважиться із силою тиску газу:

$$2kx = pS.$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона для тиску азоту знаходимо:

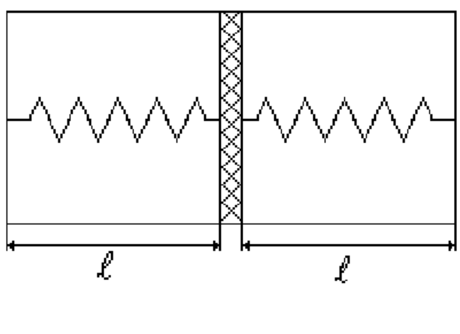


Рис. 101.

$$p = \frac{mRT}{S(\ell + x)M}.$$

Розв'язанням системи з даних двох рівнянь для зміщення поршня одержуємо:

$$x = \frac{1}{2}\ell\left(\sqrt{1 + \frac{2mRT}{Mk\ell^2}} - 1\right) = 0{,}5 \text{ м.}$$

Задача 173. Склянку масою *m* опускають догори дном у воду з температурою t_0=0^0C. Дно склянки міститься на поверхні води. На скільки підніметься дно склянки, якщо воду нагріти до t_1=100 ^{0}C? Площа дна склянки *S*, атмосферний тиск p_0. Тиском насиченої водяної пари при 0 °C знехтувати.

Розв'язок: Спочатку склянка занурена повністю, а тому її вага рівна архімедовій силі:

$$mg = \rho_0 SHg,$$

звідки

$$H = \frac{m}{\rho_0 S}.$$

Коли воду підігріли до t_1, її густина зменшилася, а на дно склянки почав діяти тиск водяної пари, спрямований вгору, який рівний атмосферному тиску. Тоді:

$$p_0 S + \rho_1 gS(H - \Delta h) = mg,$$

$$p_0 S + \rho_1 gSH - \rho_1 gS\Delta h = mg \Rightarrow$$

$$p_0 S + \rho_1 gS\frac{m}{\rho_0 S} - \rho_1 gS\Delta h = mg.$$

Але $\frac{\rho_1}{p_0} = \frac{T_0}{T_1}$, звідки $\rho_1 = \frac{T_0}{T_1}p_0$.

Тоді

$$p_0S + mg\frac{T_0}{T_1} - \rho_0 Sg\frac{T_0}{T_1}\Delta h = mg,$$

$$p_0S + mg\frac{T_0}{T_1} - mg = \rho_0 Sg\frac{T_0}{T_1}\Delta h \Rightarrow$$

$$\frac{p_0S}{\rho_0 gS}\frac{T_1}{T_0} + \frac{m}{\rho_0 S} - \frac{mg}{\rho_0 gS}\frac{T_1}{T_2} = \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{1}{\rho_0 S}\left(\left(p_0 - mg\right)\frac{T_1}{T_0} + \frac{mg}{S}\right).$$

Задача 174. У теплоізольованій посудині висотою H=0,5 *м* міститься m=0,1 *г* гелію при T_0=100 *К*. На дні посудини лежить поршень масою M′=10 кг. Посудину швидко перевертають так, що поршень виявляється зверху. На якій висоті перебуватиме поршень після того, як його рух припиняється? Теплоємністю посудини знехтувати.

Розв'язок: Умова рівноваги поршня:

$$\frac{M'g}{S} = p,$$

де p – тиск гелію, що виникне під поршне.

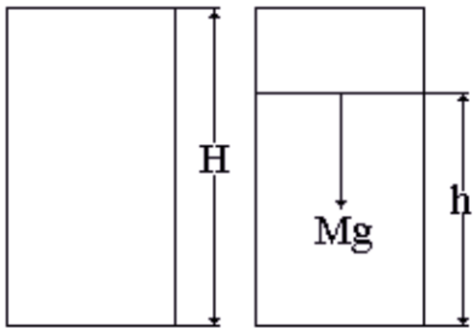


Рис. 104.

$$pV = \frac{m}{M}R(T_0 + \Delta T),$$

$$p = \frac{mR(T_0 + \Delta T)}{MV}, \quad V = Sh.$$

$$p = \frac{mR(T_0 + \Delta T)}{MSh}.$$

Процес адіабатний, тому $\Delta U + A = 0.$

$$\Delta U = \frac{m}{M}c_V\Delta T; \quad A = -M'g(H - h).$$

Тому

$$\Delta T = \frac{M'g(H-h)}{\frac{m}{M}c_V} = \frac{MM'g(H-h)}{mc_V}.$$

Отже

$$\frac{M'g}{S}=\frac{mR(T_0+\Delta T)}{MSh};\quad M'gMh=mR(T_0+\Delta T);$$

$$M'gMh=mR\left(T_0+\frac{MM'g(H-h)}{mc_V}\right);$$

$$M'gMh=mRT_0+\frac{R}{c_V}MM'gH-\frac{R}{c_V}MM'gh;$$

$$M'gMh\left(1+\frac{R}{c_V}\right)=mRT_0+\frac{R}{c_V}MM'gH.$$

$$\frac{R}{c_V}=\frac{c_p-c_V}{c_V}=\frac{c_p}{c_V}-1=\gamma-1.$$

$$M'gMh(1+\gamma-1)=mRT_0+(\gamma-1)MM'gH$$

$$h=\frac{mRT_0+(\gamma-1)MM'gH}{M'gM\gamma}$$

$$h=\frac{10^{-4}\cdot 8{,}31\cdot 100+(1{,}66-1)\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 0{,}5}{8\cdot 10\cdot 10\cdot 1{,}66}\approx 0{,}32(\text{м}).$$

Задача 175. Циліндр з теплоізолюючого матеріалу розділений теплоізолюючою перегородкою на дві частини об'ємами V_1 і V_2. В одній частині газ перебуває при температурі T_1 і тискові p_1, а в другій – цей самий газ при температурі T_2 і тискові p_2. Яка температура газу встановиться в циліндрі, якщо прибрати перегородку?

Розв'язок: До прибирання перегородки маємо:

$$p_1V_1=\nu_1RT_1\Rightarrow\nu_1=\frac{p_1V_1}{RT_1};\quad p_2V_2=\nu_2RT_2\Rightarrow\nu_2=\frac{p_2V_2}{RT_2}.$$

Коли перегородку прибрали і встановилася рівновага, то тиск став рівним p, а температура – T. Отже

$$p(V_1+V_2)=(\nu_1+\nu_2)RT\Rightarrow$$

$$T=\frac{p(V_1+V_2)}{(\nu_1+\nu_2)R}=\frac{p(V_1+V_2)}{R\left(\frac{p_1V_1}{RT_1}+\frac{p_2V_2}{RT_2}\right)};$$

$$T=\frac{p(V_1+V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}.$$

Змішування двох газів розглядаємо в два етапи: 1-й етап – ізотермічне розширення до об’єму V_1+V_2 кожного газу; 2-й етап – вирівнювання температури при постійному тиску.

$$p_1'(V_1+V_2)=\nu_1RT_1;\ p_2'(V_1+V_2)=\nu_2RT_2=p_2V_2;$$

$$p_1'=\frac{p_1V_1}{V_1+V_2};\ p_2'=\frac{p_2V_2}{V_1+V_2}$$

$$p=p_1'+p_2'=\frac{p_1V_1}{V_1+V_2}+\frac{p_2V_2}{V_1+V_2}=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}.$$

Але

$$p(V_1+V_2)=p_1V_1+p_2V_2,$$

тому

$$T=\frac{(p_1V_1+p_2V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}.$$

Задача 176. На гладенькому столі лежить герметична циліндрична посудина довжиною, що може переміщатися по столу. Посудину розділено герметичною перегородкою на дві рівні частини, в одній з яких знаходиться під деяким тиском азот, а в іншій – вуглекислий газ під тиском, удвічі більшим. У деякий момент перегородка втрачає герметичність. Знайдіть переміщення посудини після того, як гази остаточно змішаються. Масу циліндра не враховуйте.

Розв’язок:

Дано:
L - довжина циліндра
$M_{азоту}=14\cdot10^{-3}$ кг/моль
$M_{CO_2}=44$ кг/моль
$V_1=V_2=V$
$\frac{p_2}{p_1}=2$

$\Delta x-?$

Зміщення циліндра здійснюється аналогічно до зміщення перегородки за умови надання їй можливості вільно рухатись вздовж циліндра.

До руйнування перегородки:

$p_1V_1=\nu_1RT,\ p_2V_2=\nu_2RT$

звідки

$$V_2=\frac{\nu_2RT}{p_1}; \qquad (1)$$

$$p_2=\frac{\nu_2RT}{V_1}; \qquad (2)$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2}. \qquad (3)$$

Після руйнування перегородки згідно закону Дальтона

$p=p_1'+p_2'$, де $p_1'=\frac{\nu_1RT}{2V};\quad p_2'=\frac{\nu_2RT}{2V};$

Тоді $p=(\nu_1+\nu_2)\frac{RT}{2V}$ (4)

$$\frac{RT}{p}=\frac{2V}{\nu_1+\nu_2} \qquad (5)$$

Рівняння стану для вуглекислого газу набуває вигляду:

$pV_2'=\nu_2 RT$, з якого знаходимо:

$V_2'=\frac{\nu_2 RT}{p}$. Для зміни об'єму вуглекислого газу запишемо

$\Delta V=V_2'-V$, або

$\Delta V=\frac{\nu_2 RT}{p}-\frac{\nu_2 RT}{p_2}=\nu_2 RT\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}\right)$, або

$\Delta V=\frac{\nu_2 RT}{p}\left(1-\frac{p}{p_2}\right)$. Використавши (2), (3), (4) і (5), а також те, що $\Delta V=\Delta xS$ і $V=\frac{SL}{2}$, одержуємо:

$\Delta xS=\frac{SL}{2}\left(\frac{2\nu_2}{\nu_1+\nu_2}-1\right)$, звідки

$$\boxed{\Delta x=\frac{L}{2}\left(\frac{2\nu_2}{\nu_1+\nu_2}-1\right)}$$

Задача 177. З посудини об'ємом V, тиск у якій p, відкачують повітря, Скільки качань має здійснити поршневий насос об'ємом V_1, щоб тиск у посудині зменшився в К разів? Температура повітря не змінюється.

Розв'язок:

Перше качання: $pV=p_1(V+V_1)$

Друге качання: $p_1V=p_2(V+V_1)$...

n-те качання: $p_{n-1}V=p_n(V+V_1)$.

А тому

$$p_1=p\frac{V}{V+V_1};\, p_2=\frac{p_1V}{V+V_1}=p\left(\frac{V}{V+V_1}\right)^2.$$

Отже

$$p_n=p\left(\frac{V}{V+V_1}\right)^n,$$

Але

$$\frac{p_n}{p}=\frac{1}{K};\frac{1}{K}=\left(\frac{V}{V+V_1}\right)^n\Rightarrow K=\left(\frac{V+V_1}{V}\right)^n=\left(1+\frac{V_1}{V}\right)^n.$$

Тому

$$lg\,K=n\,lg\left(1+\frac{V_1}{V}\right),$$

звідки

$$n=\frac{lg\,K}{lg\left(1+\frac{V_1}{V}\right)}.$$

Задача 178. 20 г гелію в циліндрі під поршнем повільно переходять зі стану V_1=32 *л* і p_1=4,1 *атм* у стан з V_2=9 *л* і p_2=15,5 *атм.* Якої максимальної температури досягне при цьому газ, якщо на діаграмі *p*, *V* процес зображається прямою лінією.

Розв'язок: Для процесу характерна лінійна залежність тиску від об'єму, а саме:

$$p=aV_1+b.$$

$$p_1=aV_1+b;\ p_2=aV_2+b,$$

$$p_2-p_1=a(V_2-V_1)\Rightarrow$$

$$a=\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}=\frac{15{,}5-4{,}1}{9-32}=-0{,}5\frac{\text{атм}}{\text{л}}.$$

$$p_1-b=aV_1;\ p_2-b=aV_2;$$

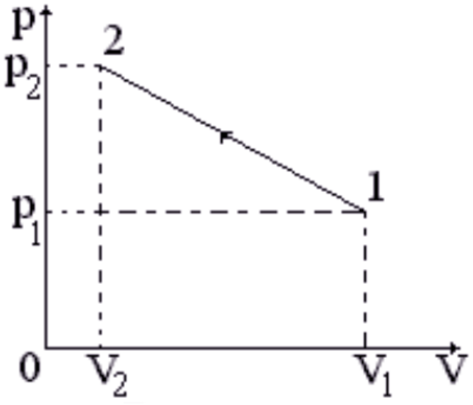


Рис. 105.

$$\frac{p_1-b}{p_2-b}=\frac{V_1}{V_2}\quad p_1V_2-bV_2=p_2V_1-bV_1;\quad b(V_1-V_2)=p_2V_1-p_1V_2;$$

$$b=\frac{p_2V_1-p_1V_2}{V_1-V_2}=\frac{15{,}5\cdot 9-4{,}1\cdot 32}{32-9}\approx 20(\text{атм}).$$

Газ підкоряється рівнянню стану $pV=\nu RT$. Але $p=aV+b$, тому $aV^2+bV=\nu RT$.

T=f(V) – парабола, що розміщена вершиною угору, бо a<0. Максимуму задовольняють кратні корені квадратного рівняння.

Це можливо, коли $V_m=\frac{1\cdot b}{2\cdot 2a}$

Тоді

$$\nu RT_m = \frac{ab}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} = \nu RT$$

$$T = \frac{\dfrac{b}{4a} - \dfrac{b}{2a}}{\nu R} = -\frac{-b}{4a\nu R} = 490(\text{K}).$$

Основне рівняння термодинаміки

Задача 179. Кисень при температурі 27°C знаходиться в циліндричній посудині, закритій зверху поршнем масою 100 кг і поперечним перерізом 1 м^2. Поршень прикріплений до дна пружиною жорсткістю 1 кН/м і може ковзати в посудині без тертя. У початковий момент пружина недеформована, поршень знаходиться в рівновазі, кисень займає об'єм 1 м^3. Яку кількість теплоти потрібно надати кисню, щоб його об'єм збільшився на 10%? Теплоємністю системи знехтуйте.

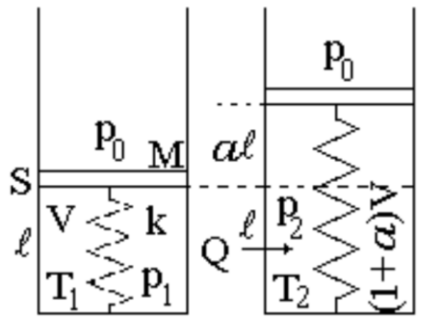


Рис. 106

Розв'язок: З першого закону термодинаміки $Q = A' + \Delta U$, де A' – робота газу, що дорівнює добутку середньої сили тиску газу на переміщення поршня, визначається за формулою:

$$A' = S\frac{(p_1 + p_2)}{2}al.$$

Для тиску у початковому і кінцевому стані відповідно можемо записати:

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S}, \quad p_2 = p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{kal}{S}.$$

Підставивши визначені вирази тисків, визначимо величину роботи

$$A = \left(p_0 S + Mg + \frac{kal}{2}\right)al = 10^4 \text{ Дж}.$$

З рівнянь для початкового і кінцевого станів газу

$$p_1Sl = \nu RT_1, \quad p_2S(l\text{-}a)l = \nu RT_2,$$

для зміни температури одержуємо:

$$T_2 - T_1 = (p_2 - p_1)(1-a)\frac{Sl}{\nu R}.$$

Тепер можемо визначити величину зміни внутрішньої енергії ΔU:

$$\Delta U = \frac{i}{2}R\nu\Delta T = \frac{5Sl}{2}\left((1-al)\left(p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{kal}{S}\right) - \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\right) = 2{,}5\cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Маючи значення роботи A і внутрішньої енергії ΔU за першим законом термодинаміки для кількості теплоти маємо:

$$Q = A' + \Delta U = 3{,}5\cdot 10^4 \text{ Дж} = 35 \text{ кДж.}$$

Задача 180. Теплоізольований, закритий стінками з обох боків циліндр розділений на дві частини теплонепровідним поршнем, який може пересуватися без тертя (рис. 103). У лівій частині циліндра міститься 1 моль ідеального одноатомного газу, в правій – вакуум. Поршень з’єднаний з правою стінкою циліндра пружиною, довжина якої у недеформованому стані дорівнює довжині циліндра. Визначити теплоємність системи. Теплоємністю циліндра, поршня і пружини знехтуйте.

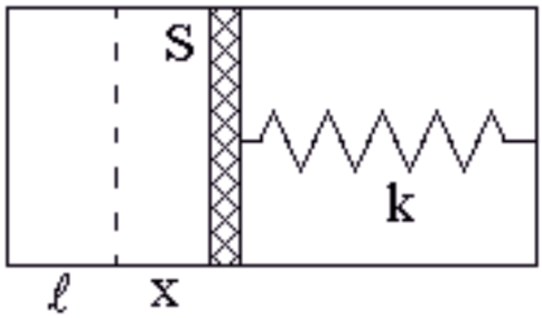


Рис. 103.

Розв’язок: При наданні системі кількості теплоти *Q*, газ нагрівається на ΔT і виконує роботу по переміщенню поршня на відстань *x*. Для одного моля перший закон термодинаміки має вигляд:

$$Q = A + \Delta U = -\Delta\Pi + \Delta U = \frac{k(l+x)^2}{2} - \frac{kl^2}{2} + \frac{3}{2}R\Delta T.$$

За умовами рівноваги поршня:

$$p_1S = kl, \quad p_2S = k(l+x)$$

для тисків у першому і другому станах маємо:

$$p_1 = \frac{RT_2}{Sl}, \quad p_2 = \frac{RT_2}{S(l+x)},$$

звідки

$$\frac{RT_1}{l} = kl, \quad \frac{RT_2}{l+x} = k(l+x),$$

а отже

$$kl^2 = RT_1, \quad k(l+x)^2 = RT_2.$$

Із врахуванням останніх співвідношень перший закон термодинаміки набуває вигляду: $Q = \frac{RT_2}{2} - \frac{RT_1}{2} + \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{R}{2}\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T = 2R\Delta T.$

З останнього для теплоємності системи С одержуємо:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = 2R.$$

Робота ідеального газу

Задача 181. Яку роботу виконує моль ідеального газу в циклі 1-2-3-4-1, якщо відомі температури T і T_3 в точках 1 і 3 відповідно, причому ці точки лежать на одній прямій, що проходить через початок координат.

Розв'язок: Робота процесу, що наведена на діаграмі *p, V*, чисельно рівна площі діаграми:

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_2V_1 =$$
$$= RT_3 - RT_2 - RT_4 + RT_1 = R(T_1 - T_3 - T_2 - T_4).$$

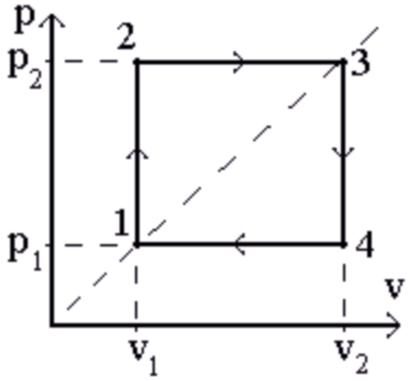


Рис. 106.

Точки 0, 1 і 3 лежать на одній прямій, а тому:

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2} \Rightarrow p_1V_2 = p_2V_1 \Rightarrow RT_4 = RT_2.$$

Отже $T_4 = T_2$, а отже $A = R(T_1 + T_3 - 2T_2)$.

Процес 2 – 3 – ізобаричний, а тому:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Процес 1 – 2 – ізохоричний, а тому:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Одержуємо: $\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2^2 = \sqrt{T_1 \cdot T_3}.$

Для шуканої роботи маємо: $A = R(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 \cdot T_3}) = R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2.$

Задача 182. Ідеальний газ сталої маси розширюється за законом $p = \alpha V$. Визначити роботу, виконану газом при збільшенні об'єму від V_1 до V_2. Нагрівається, чи охолоджується газ при

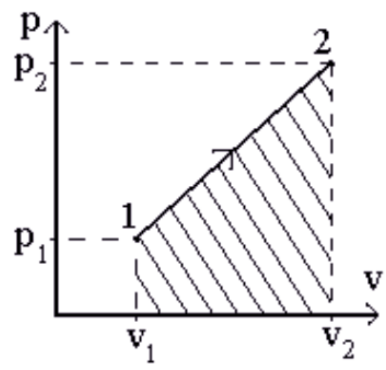


Рис. 107.

такому процесі?

Розв'язок: $dA = p\,dV; \quad p = \alpha V; \quad dA = \alpha V\,dV$

$$A_{1,2} = S_{v_1 12 v_2} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha(V_1 + V_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\alpha}{2}(V^2{}_2 - V_1^2).$$

A_{12}>0; газ виконує роботу, тепло підводиться, а тому він нагрівається: за рахунок підведеного тепла газ виконує роботу і нагрівається.

***Задача* 183**. Температура маси *m* ідеального газу змінюється за законом $T=\alpha V^2$. Визначити роботу, виконану газом при збільшенні об'єму від V_1 до V_2. Нагрівається чи охолоджується газ при цьому процесі? Молярна маса газу М.

Розв'язок: $pV = \frac{m}{M}RT; \quad pV = \frac{m}{M}R\alpha V^2;$

$$p = \frac{m}{M}\alpha RV.$$

$$A = S = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}\alpha R\frac{V_1 + V_2}{2}\cdot(V_2 - V_1);$$

$$A = \frac{m}{2M}\alpha R(V_2^2 - V_1^2).$$

Газ виконує роботу. Крім того відомо, що:

$$T = \alpha V^2; \quad T_1 = \alpha V_1^2; \quad T_2 = \alpha V_2^2.$$

Це свідчить, що газ нагрівається за рахунок підведеного до процесу тепла, інакше такий процес неможливий.

Задача 184. Процес з ідеальним газом спочатку здійснюють так, що тиск і об'єм пов'язані рівністю $P\sqrt{V} = B$. Коли температура газу досягне значення *T*, процес продовжують при іншій залежності температури від об'єму: $P = \frac{D}{V^2}$. Визначити температуру *T*, вважаючи заданими константи B і D, а також кількість речовини γ.

Розв'язок: I. $PV = \gamma RT \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\sqrt{V}}\cdot V = \gamma RT; \quad B\sqrt{V} = \gamma RT.$

II. $PV = \gamma RT \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{V^2}\cdot V = \gamma RT; \quad \frac{D}{V} = \gamma RT.$

$$\left.\begin{aligned} B^2V &= \gamma^2R^2T^2 \\ \frac{D}{V} &= \gamma RT \end{aligned}\right\} \quad B^2D = \gamma^3R^3T^3; \quad T = \sqrt[3]{\frac{B^2D}{(\gamma R)^3}}; \quad T = \frac{\sqrt[3]{B^2D}}{\gamma R}.$$

Задача 185. Температура газів, що утворюються при згоранні палива в циліндрах двигуна автомобіля, 800^0С. Температура вихлопних газів 80^0С. Витрати бензину на 100 *км* шляху при швидкості 90 *км/год* дорівнює 10 *л*. Яку потужність міг би розвинути двигун, якби він являв собою ідеальну теплову машину, що працює з максимально можливим коефіцієнтом корисної дії?

Розв'язок:

Дано:

$T_1 = 1073K$

$T_2 = 353K$

$s = 100км$

$v = 90км/год$

$V_{100} = 10^{-2}м^3$

$N - ?$

Шукана потужність визначається за формулою

$$N = \eta\frac{Q}{\Delta t}, \qquad (1)$$

де $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_{1.}}$ (2)

Покладемо $\Delta t = 3600с,$ тоді маса витраченого бензину знайдеться як

$$V_{90} = \frac{V_{100}\cdot 90}{100}.$$

Для Q одержимо:

$$Q = qm = q\rho V_{90} = \frac{q\rho V_{100}\cdot 90}{100} \qquad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), одержуємо

$$\boxed{N = \frac{T_2 - T_1}{T_1}\cdot\frac{q\rho V_{100}\cdot 90}{100\cdot 3600}}$$

$$N = \frac{(1073 - 353)}{1073}\cdot\frac{44\cdot 10^6\cdot 710\cdot 10^{-2}\cdot 90}{100\cdot 3600} =$$

$=52,406$ *кВт.*