ОПТИКА. ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ

Задачі на закони відбивання ділять на дві основні групи: задачі на окреме дзеркало і задачі на систему дзеркал. В свою чергу першу групу складають три підгрупи: задачі на плоске, випукле і вгнуте дзеркала. Розв'язування кожного такого типу задач має свої специфічні особливості.

1. Задачі з окремим дзеркалом слід розпочинати з побудови зображення, При цьому варто звертати увагу на розташування предмету відносно характерних точок сферичного дзеркала, так як від цього залежать розташування і розміри зображення.

Побудувавши зображення предмета і позначивши відстані від предмета і зображення до дзеркала, складають розрахункові рівняння. При цьому використовують формулу дзеркала і вираз для коефіцієнту лінійного збільшення. При складанні рівнянь слід враховувати знаки відрізків, що входять до формули дзеркала.

2. Задачі на побудову частіше передбачають визначення шляхом побудови розташування зображення предмета в дзеркалі і напрямку поширення деякого довільного променя після відбивання від дзеркала. В умовах таких задач вказується, як правило, вид дзеркала, його характерні точки, розташування і розміри предмету, або хід променів до відбивання від дзеркала.

3. Певна група задач на побудову передбачає за заданими взаємному розташуванню предмета і його зображення відносно оптичної вісі визначити вид сферичного дзеркала, його характерних точок. При розв'язуванні таких задач користуються властивостями характерних променів, що застосовуються при побудові зображень.

4. В задачах на систему дзеркал необхідно відшукати зображення предмету після двократного відбивання падаючих променів спочатку від одного, а потім від другого дзеркала. При цьому розрахунки і побудова базуються на тому, що завдяки зворотності ходу променів зображення в першому дзеркалі можна розглядати як предмет для другого. Якщо зображення в першому дзеркалі розташоване перед другим, то проміжний предмет слід вважати дійсним, і у формулі, записаній для другого дзеркала, $d>0$. Якщо зображення виявиться за другим дзеркалом, то $d<0$.

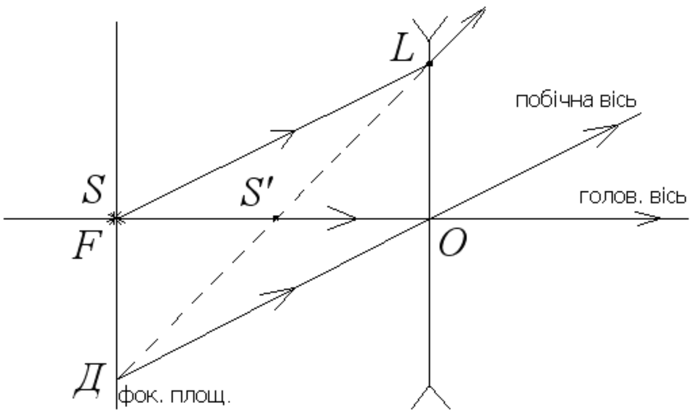
Розв'язування задач на побудову зображень при заломленні світла в одиночних тонких лінзах зводяться до побудови зображення та складання основних і допоміжних рівнянь аналогічно як до задач на сферичні дзеркала. Розв’язування задач на систему лінз аналогічно ґрунтується на принципі зворотності світлових променів, з якого слідує, що зображення, яке дає перша лінза, може розглядатись як предмет для другої і т.д. При складанні рівнянь і подальших розрахунках кожного разу слід враховувати яким є проміжне зображення: уявним чи дійсним, відіграючи роль предмета для наступної лінзи.

Про деякі помилки учнів

Побудова зображень в тонких лінзах.

Для побудови зображень в тонких лінзах в кожному випадку використовують три основні промені: перший промінь паралельний до головної оптичної вісі, що заломлюється і проходить через головний фокус; другий промінь, що проходить через центр лінзи і не заломлюється; третій промінь, що проходить через головний фокус, заломлюється і проходить паралельно до головної оптичної вісі.

Приклад 1: точкове джерело лежить в фокусі розсіювальної лінзи. Побудувати зображення.



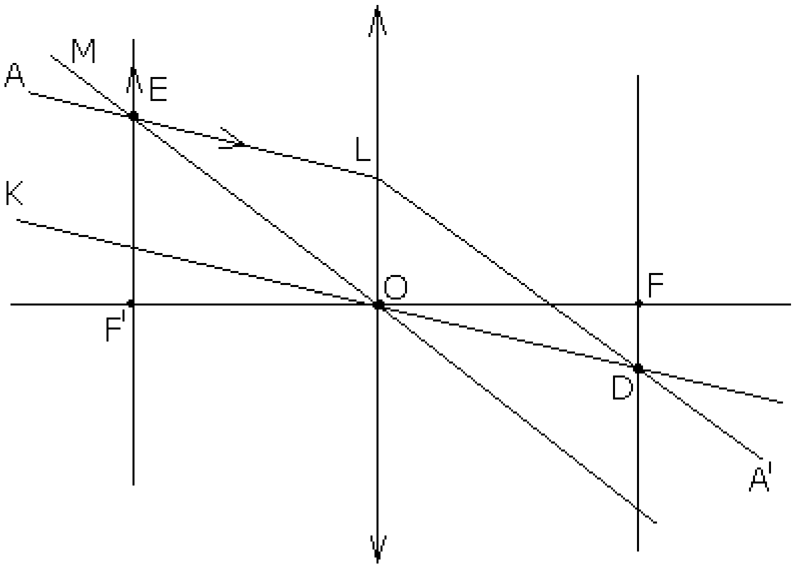
a) Всі три зручні промені співпадають (SO).

b) Проводять довільний промінь SL, який потім заломиться.

c) Проводять $ДО \,//\, SL$ – побічна оптична вісь, що перетинає фокальну площину в побічному фокусі $Д$.

d) SL заломлюється і його продовження йде в додатковий фокус $Д$. Точка перетину FO і $LД$ є точка S'. Це і є уявне зображення точки S в розсіювальній лінзі.

Приклад 2: Дано хід променя AL і хід заломленого променя LA' в тонкій лінзі. Оптичний центр лінзи O. Визначити положення головних фокусів лінзи.



a) Проводимо $KO // AL$, це побічна головна вісь, вона перетне LA' в побічному фокусі – точці $Д$.

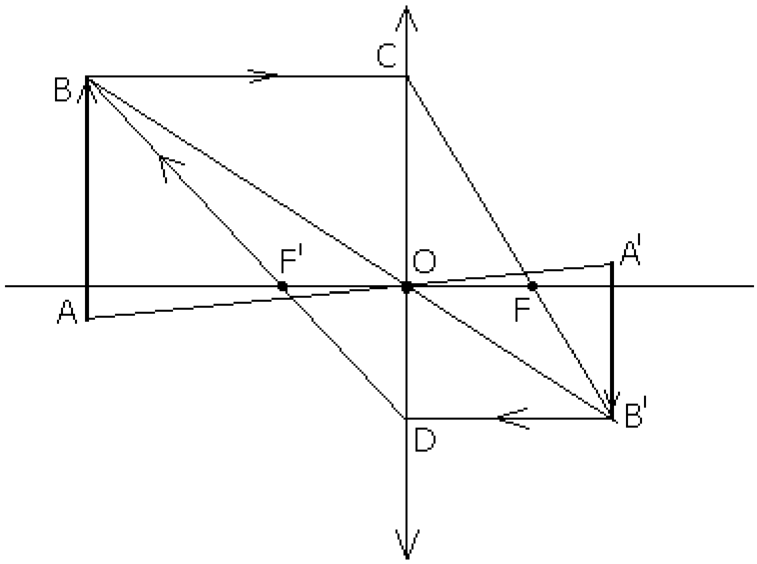
b) Проведемо лінію через O, перпендикулярно до площини лінзи – це головна оптична вісь.

c) Проведемо $ДF \perp OF$. Точка перетину і є головний (задній) фокус лінзи.

d) Проведемо $MO // LA'$ – це також побічна вісь.

e) Проведемо $EF' \perp OF$? А тому одержимо головний передній фокус лінзи F'.

Приклад 3: За положенням предмету та його зображення (паралельні стрілки AB і $A'B'$) відновити положення лінзи та її головних фокусів.



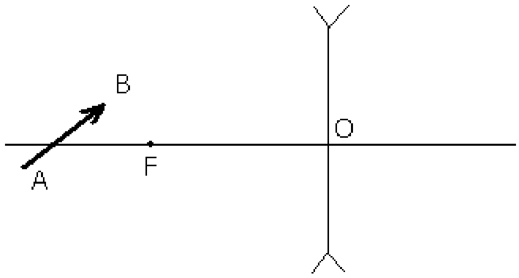
a) Промені AA' і BB' – це промені, що не заломлюються. Тому вони проходять через центр лінзи O. Лінза – паралельна AA' і BB'.

b) Проводимо головну оптичну вісь ($OO' \perp$ площини лінзи або AB і $A'B'$).

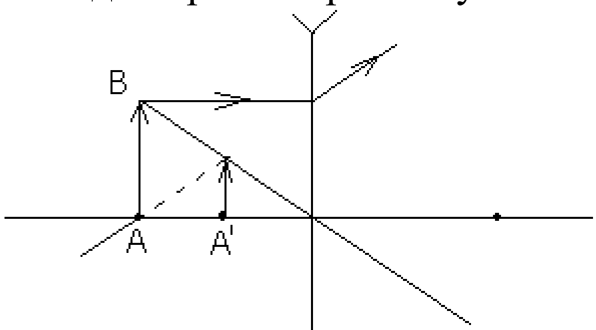
c) $BC // OO'$, після заломлення вона пройде через точку B' і одночасно перетинає головну оптичну вісь в головному фокусі.

d) Аналогічно з B': $BД' // OO'$ і подібним чином визначаємо інший фокус.

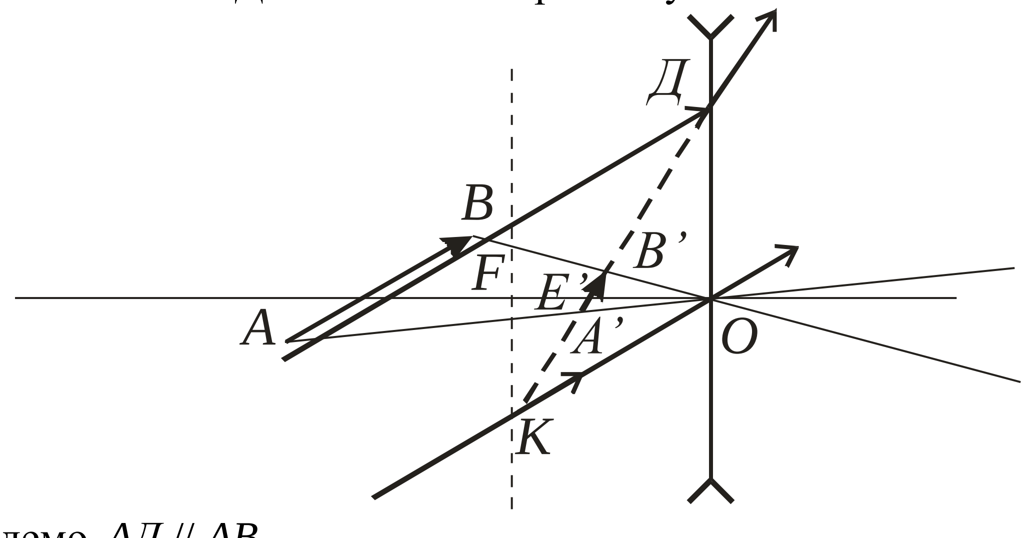
Приклад 4: Побудувати нахиленого зображення стрілки AB в тонкій розсіювальній лінзі.



Базовий малюнок для прямого розташування предмету AB:



Для нахиленого розташування:

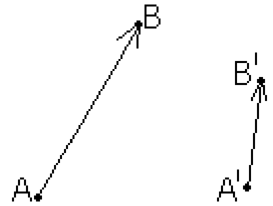


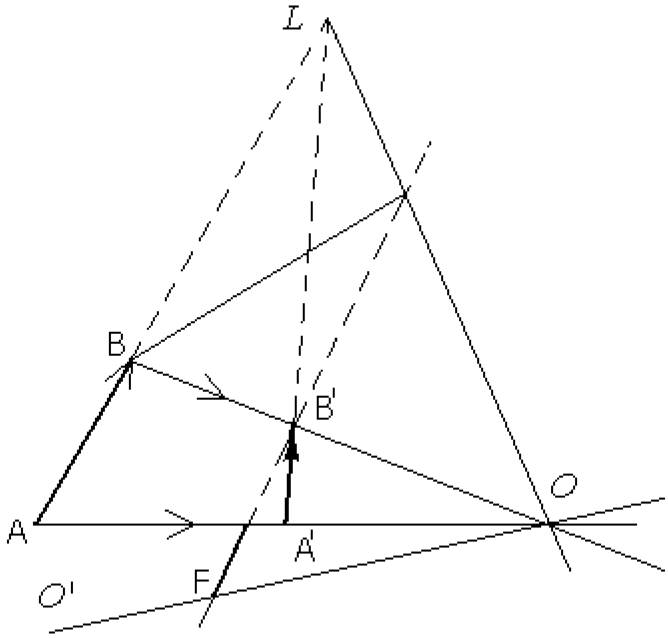
a) Проведемо $AД // AB$.

b) Проведемо CO – побічну оптичну вісь, що перетинає фокальну площину в точці K – це побічний фокус. Положення точки E' – визначено.

c) AO – не заломлений промінь, BO – також, вони перетинаються з $ДK$ в точці A' і B'. Зображення AB є $A'B'$.

Приклад 5: Відновити положення лінзи та її головних фокусів за відомих положень предмета та його зображення AB і $A'B'$.

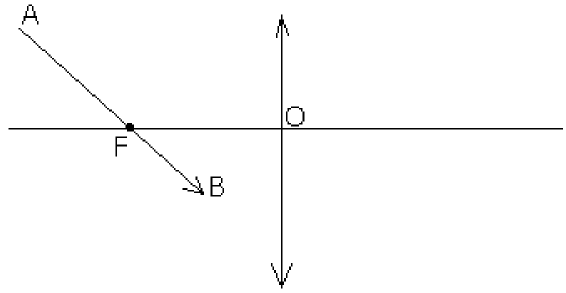


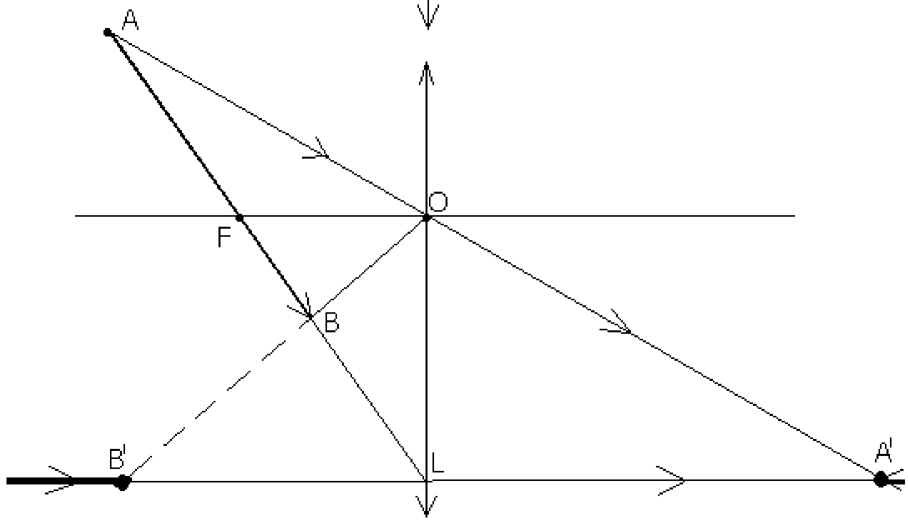


a) Продовжуємо AB і $A'B'$ до перетину, ця точка лежить на лінзі, бо AB після заломлення пройде через $A'B'$.
b) Через центр лінзи проходять промені, що не заломлюються, тому AA' s BB' перетинаються в оптичному центрі. LO – площина лінзи.
c) Головна оптична вісь $OO' \perp LO$.

Приклад 6: Побудувати зображення похилої стрілки AB, що проходить через головний фокус збиральної лінзи.

В такому випадку, коли предмет перетинає фокальну площину, зображення предмета „розірване” – частина зображення – дійсні „світні” точки за лінзою, друга частина – уявне зображення точок (зображення точок перед лінзою).





a) Зображення стрілки знаходиться на прямій, що одержане з променя AB після заломлення в лінзі. Цей промінь після заломлення паралельний до головної вісі, бо AB проходить через головний фокус.
b) AO *і* BO – не заломлюються, їх перетин з $A'B'$ дають положення точок A' і B'.

Задача 232. Якою буде віддаль від предмета до його зображення, якщо дивитись на предмет через прозору скляну пластину товщиною h з показником заломлення n? Чи відрізняється розмір зображення від розміру предмета ?

Розв'язок. Розглянемо випадок, коли око людини "дивиться" на предмет нормально до площини пластинки. Вона бачитиме світну точку S у точці S' (рис. 151). Око бачитиме предмет ближче на $\Delta l = OC$.

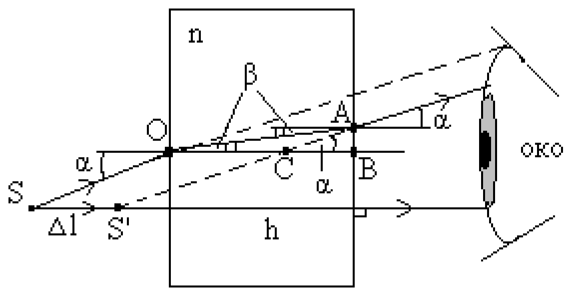


Рис. 151.

Всі кути на рисунку малі, тобто:

$\sin\alpha = \alpha, \ \sin\beta = \beta, \ \dfrac{\alpha}{\beta} = n$ – закон заломлення для точки O.

З ΔOAB, отримаємо $AB = h\,\mathrm{tg}\beta = h\beta$.

З ΔCBA – $CB = \dfrac{AB}{\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{AB}{\alpha} = \dfrac{h\beta}{\alpha}$.

Тоді: $\Delta l = OC = h - \dfrac{h\beta}{\alpha} = h\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Отже, якщо дивитись на світну точку крізь плоскопаралельну пластинку нормально до її поверхні, то побачимо її на $\Delta l = h\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ ближче. Оскільки предмет – це сукупність світних точок, то й предмет буде ближче на Δl. Розміри предмета не зміняться.

Задача 233. Коли дивитись на побутове дзеркало здалеку, то предмети здаються спотвореними. Якщо ж дзеркало міститься близько, то цього не відбувається. Чому?

Розв'язок. Залежно від відстані між оком спостерігача й дзеркалом розміри ділянки дзеркала, яка формує зображення, змінюються. В міру віддалення ці розміри збільшуються. Якщо на малій відстані вони за порядком величини дорівнюють діаметру зініці, то зі збільшенням відстані набувають порядку розмірів розглядуваного об'єкта або дзеркала (менший із двох). Оскільки побутове дзеркало не ідеально плоске, на великій ділянці його поверхні неминучі нерівності, які й служать причиною того, що виникають спотворення.

Задача 234. Який найбільший кут може бути між двома гранями призми, виготовленої з прозорого матеріалу з показником заломлення 2, щоб через ці дві грані ще можна було побачити джерело світла ?

Розв'язок. Найбільшому значенню $\theta = \alpha + \beta$ відповідає випадок найбільшого значення кутів α і β. Але найбільші значення цих кутів – це граничні кути повного внутрішнього відбивання (рис.152).

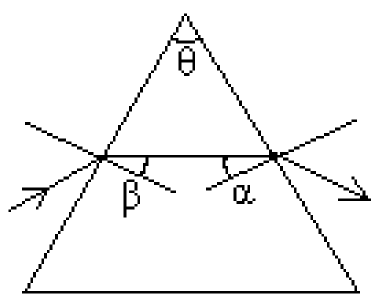


Рис. 152.

$$\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{n} = 30^0.$$

Отже, $\theta = 2\alpha_0 = 60^0$.

Задача 235. На грань а призми із заломлюючим кутом φ падає під кутом α промінь (рис. 153). Яку умову має задовольняти показник заломлення матеріалу призми, щоб цей промінь, падаючи на грань *b*, не проходив крізь неї ?

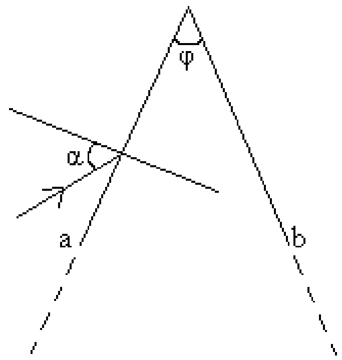


Рис. 153.

Відповідь:

$$n \geq \sqrt{1 + \frac{(\sin\alpha + \cos\varphi)^2}{\sin^2\varphi}}.$$

Задача 236. Оптичний волоконний світловод є скляним циліндром з показником заломлення n_c = 1,50, оточеним оболонкою з показником заломлення n_0 = 1,41 (рис. 154). На передній торець світловода падає збіжний під кутом 2α пучок. При якому найменшому значенні α_m кута все проміння, що потрапило в світловод, поширюється ним?

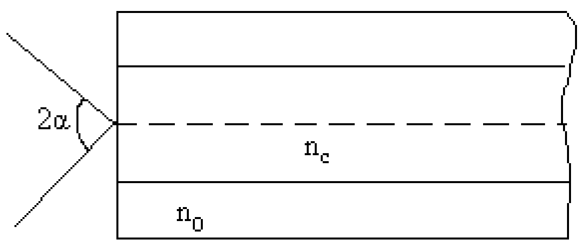


Рис. 154.

Відповідь: $\alpha_m = \arcsin\sqrt{n_c^{\,2} - n_0^{\,2}} \approx 30^0.$

Задача 237. Для обертання зображення часто використовують призму Дове (рис.155) – зрізану прямокутну рівнобедрену призму. Визначити довжину основи призми, якщо її висота h = 2,11 см, а показник заломлення скла n = 1,41. Призма має обертати пучок максимального перерізу і не містити скла, яке "не працює".

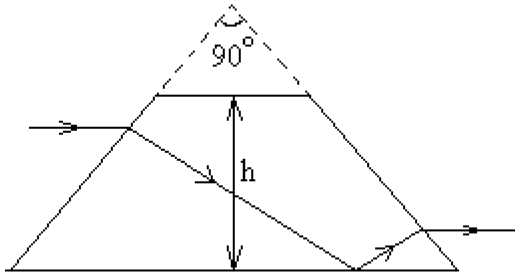


Рис. 155.

Відповідь: $L \approx 10$ см.

Задача 238. На передню грань плоскопаралельної пластинки, виготовленої із скла з показником заломлення n, падає збіжний світловий пучок, що має форму конуса з кутом при вершині 2α. Діаметр освітленої плями на передній грані пластинки D. При якій товщині пластинки діаметр вихідної плями дорівнюватиме $\frac{D}{2}$?

Розв'язок:

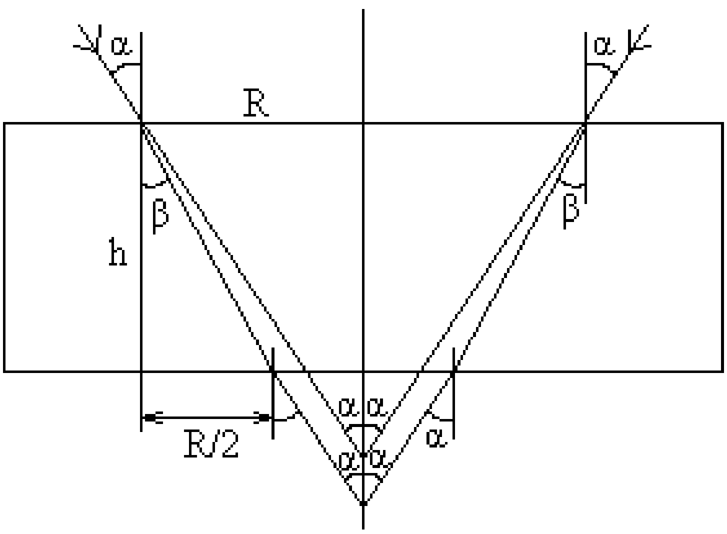


Рис. 156.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \text{ звідси } \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

З рисунка маємо:

$$\frac{R}{2h} = tg\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\; h = \frac{R\sqrt{1-\sin^2\beta}}{2\sin\beta} = \frac{R\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Задача 239. Скільки відбивань зазнає промінь світла, що падає під кутом β на одне з плоских дзеркал, які утворюють двогранний кут α, перш ніж він вийде з цього дзеркального кута? Падіння відбувається в площині, яка перпендикулярна до ребра двогранного кута.

Розв'язок: На рис. 157 зображено лише кілька початкових відбивань променя і той момент, коли напрям поширення змінюється на протилежний. Визначимо скільки відбивань зазнає промінь до цього.

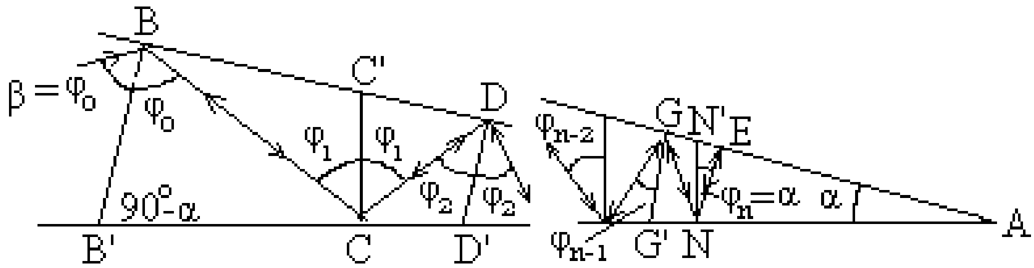


Рис. 157.

Легко бачити, що кожний наступний кут падіння променя на дзеркало менший, ніж попередній кут падіння на величину α. Справді, $CC'\perp B'A, B'B\perp BA,$ із прямокутного трикутника $B'BA$ випливає, що $\angle B' = \frac{\pi}{2} - \alpha.$ Тоді $\angle BCB' = \pi - \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \alpha$ $(з\ \Delta BCB')$.

Крім того, $\angle BCB' = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ так що остаточно $\varphi_1 = \varphi_0 - \alpha.$ Аналогічно $\varphi_2 = \varphi_1 - \alpha = \varphi_0 - 2\alpha,$ взагалі $\varphi_n = \varphi_0 - n\alpha,$ де n=0, 1, 2, 3, ...

Поширення променя світла в одному напрямі відбуватиметься доти, поки $\varphi_n > \alpha$. Як тільки стане $\varphi_n \le \alpha,$ перше дальше відбивання змінить напрям поширення на протилежний. Так коли $\varphi_n = \alpha$ (див. рис. 157.) NE

являється нормаллю до *BA,* і тоді відбитий промінь повертається назад у тому самому напрямі, в якому поширюється падаючий, і виходитиме з дзеркального кута назовні в місці початкового падіння.

Отже, якщо $\frac{\beta}{\alpha} = k,$ де k – ціле число, то шукане число відбивань є N=2k+1. Якщо $\frac{\beta}{\alpha} = k + \Delta,$ де $\Delta < 1$, то шукане число відбивань дорівнюватиме: $N=2(k+1)$.

Задача 240. За допомогою фотоапарата на фотопластинці отримали чітке зображення предмета, який розташований на відстані 4 м перед об'єктивом і має розміри 2 см. На якій відстані від об'єктиву розміщений той самий предмет, якщо його зображення на тій же пластинці (відстань від пластинки до об'єктива є незмінною) отримали з розмитістю 1 мм? Діаметр об'єктива – 2 см, а його фокусна відстань – 20 см. Якою буде відповідь задачі, якщо фокусна відстань об'єктива дорівнюватиме 30 см?

Розв'язок. Вважаємо, що "розмитість" контура зображення удвічі менша "розмитості" точки. У першому випадку:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0}, \text{ звідси } f_0 = \frac{d_0 F}{d_0 - F} \qquad (1)$$

У другому випадку

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_0 + x} \qquad (2)$$

З рисунка знаходимо:

$$\frac{x}{2\Delta l} = \frac{x + f_0}{D},$$

звідси

$$x = \frac{2\Delta l f_0}{D - 2\Delta l}.$$

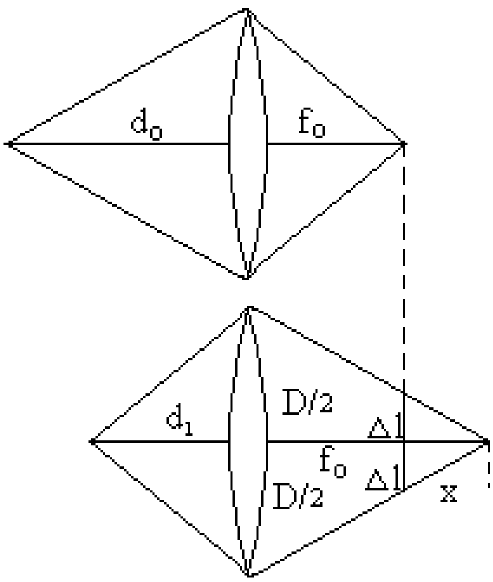


Рис. 158.

отже $$x + f_0 = \frac{f_0 D}{D - 2\Delta l.} \qquad (3)$$

Розв'язуючи рівняння (1-3), одержуємо:

$$d_2 = \frac{D d_0 F}{D d_0 - (D - 2\Delta l)(d_0 - F)} = 1{,}4 \text{ м},$$

D – діаметр лінзи, Δl - розмитість зображення, F – фокусна відстань лінзи.

Аналогічно розв'язується задача для випадку $d_1 > d_0$.

Задача 241. Тонка скляна лінза у повітрі є збиральною з оптичною силою D_1= 6 дптр. У рідині вона стає розсіювальною з оптичною силою D_2=-1 дптр. Визначити показник заломлення рідини. Показник заломлення скла n_1 = 1,5.

Розв'язок: Для оптичних сил лінзи в повітрі і рідині можна записати:

$$D_1 = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$

$$D_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Поділивши другу рівність на першу, дістаємо:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{n_1 - 1},$$

звідси

$$n_2 = \frac{n_1}{1 + (n_2 - 1)\frac{D_2}{D_1}} = 1{,}6.$$

Задача 242. Світна точка розташована на відстані h_0 =0,2 м від головної оптичної вісі вгнутого дзеркала. Її зображення знаходиться на відстані h_1 =0,4 м від тієї ж вісі і на відстані l =0,5 м від головного фокуса. Знайти фокусну відстань дзеркала.

Розв'язок. В умові задачі не говориться про те, яким є зображення точки – уявним чи дійсним. Тому слід розглядати два випадки.

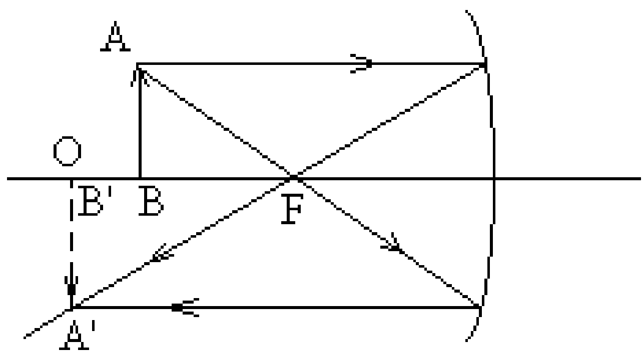


Рис. 159.

1. Зображення дійсне (рис.159).

Можна вважати, що світна точка A належить деякому предмету AB, розташованої перпендикулярно до головної оптичної вісі дзеркала. Оскільки зображення дійсне, то:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \qquad (1)$$

Збільшення, яке дає дзеркало,

$$k = \frac{h_1}{h_0} = \frac{f}{d}. \qquad (2)$$

Враховуючи, що $A'F = l,\ AB = h_0,\ A'B' = h_1$ та розв'язуючи сумісно рівняння (1) і (2), знаходимо F.

$$\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}=\frac{h_1}{h_0}=2; \quad \frac{F}{d-F}=2; \quad d=\frac{3}{2}F;$$

$$f=2d=3F; \quad B'F=f-F=2F=0{,}3 \text{ м};$$

$$F=0{,}15 \text{ м}.$$

2. Зображення уявне (рис. 160).

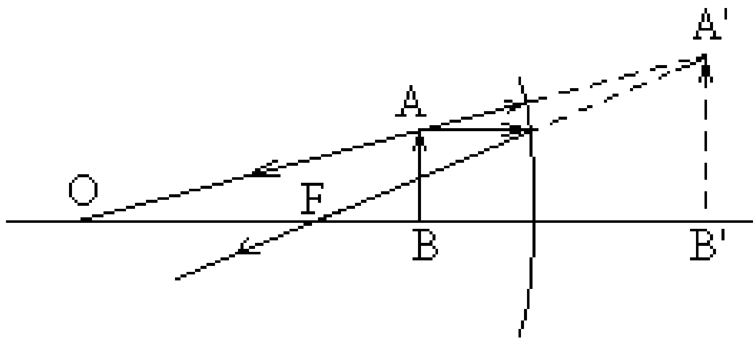


Рис. 160.

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}; \quad \frac{F}{F-d}=\frac{f}{d}=\frac{h_1}{h_0}=2;$$

$$d=\frac{1}{2}F; \quad f=2d=F; \quad B'F=F+f=2F=0{,}3 \text{ м};$$

$$F=0{,}15 \text{ м}.$$

Задача 243. Визначити графічно розташування ока спостерігача щоб він міг бачити в плоскому дзеркалі одночасно зображення точки *A* і відрізок прямої *BC*, розташованих відносно дзеркала так, як показано на рис. 161.

Розв'язок. Спостерігач зможе одночасно бачити зображення точки *A* і відрізок прямої *BC* в тому випадку, якщо в око будуть попадати відбиті промені, що виходять із точок *A, B* і *C* до падіння на дзеркало. Промені, що виходять з точки *A*, після відбивання від дзеркала поширюються пучком 1, 2 і дають зображення A'. Промені, що виходять з крайніх точок предмету *B* і *C*, Відбившись, поширюються пучками 3, 4 і 5, 6, даючи уявне зображення відносно точок *B* і *C*. Зображення решти точок відрізку *BC* будуть розташованими в просторі, обмеженому променями 3, 4.

Як видно з рисунку, простір, в кожній точці якого зустрічаються промені, що утворюють зображення A', B', C', є сірим трикутником, в одній із точок якого і повинне знаходитись око людини.

Задача 244. Одна сторона двовгнутої симетричної скляної лінзи покрита сріблом. Показник заломлення скла n=1,6, радіус кривизни поверхні лінзи R=20 см. На відстані d=50 см від лінзи знаходиться предмет висотою h=6 см. Визначити величину зображення, яке дає оптична система.

Розв'язок. Зображення A_3B_3 предмета AB показано на рис. 162. Величина зображення пов'язана з висотою предмета наступним чином:

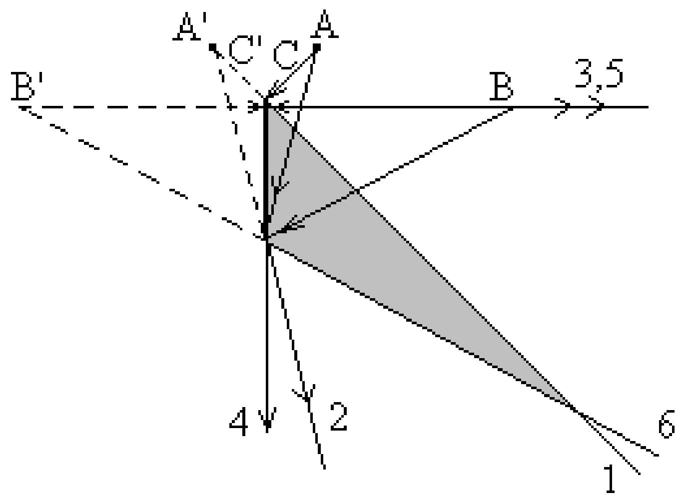


Рис. 161.

$$\frac{h_3}{h} = k,$$

де k – збільшення системи, яке дорівнює добутку збільшень складових системи: $k=k_1k_2k_3$;

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1}; \quad k_2 = \frac{f_2}{d_2}; \quad k_3 = \frac{f_3}{d_3}.$$

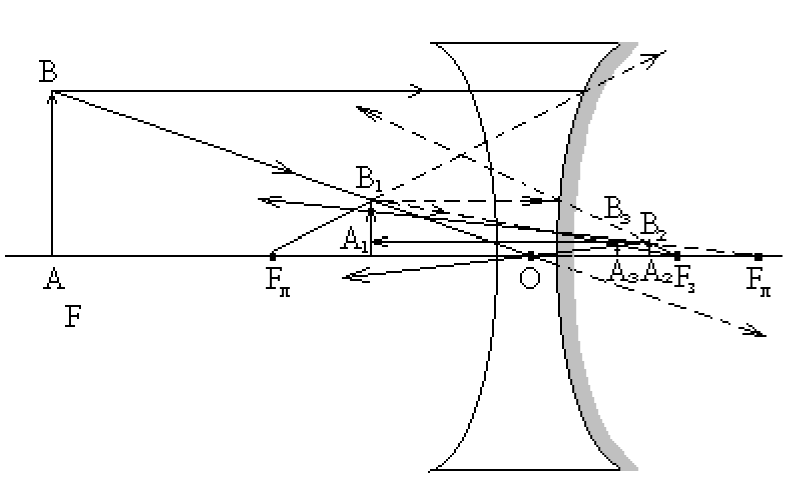


Рис. 162.

Відрізки d_1, f_1, d_2, f_2, d_3, f_3 можуть бути визначеними з рівнянь, складених за формулами лінзи і дзеркала. Для лінзи

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{F_л},$$

$$\text{де } \frac{1}{F_л}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

В нашому випадку $R_1=R_2=20$ см, $F_л=\frac{50}{3}\approx 16{,}6$ см,

$f_1=12{,}5$ см, $k_1=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Для дзеркала

$$\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{F_д},$$

$$\text{де } F_д=\frac{R}{2}=10\text{ см},\quad d_2=f_1,\quad f_2\approx 5{,}55\text{ см},\ k_2=\frac{4}{9},\quad \frac{1}{d_3}-\frac{1}{f_3}=-\frac{1}{F_л},$$

$$f_3\approx 4{,}16\text{ см},\quad k_3=\frac{3}{4},\quad k=\frac{1}{12},\quad h_3=0{,}5\text{ см}.$$

Задача 245. Побудувати зображення світної точки S, що знаходиться на головній оптичній вісі випуклого дзеркала. Розташування оптичного центру O, полюса P, і фокуса дзеркала F показано на рис. 163.

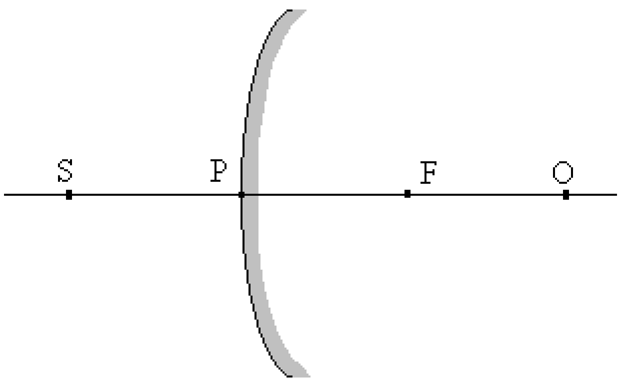


Рис. 163

Відповідь: Побудова і зображення точки виконано на рис. 164.

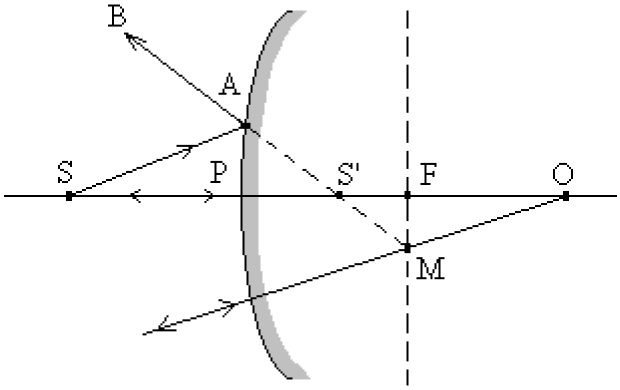


Рис. 164.

Задача 246. Дано: A – предмет, A' – його зображення (рис. 165 а). Знайти положення лінзи та її фокусів.

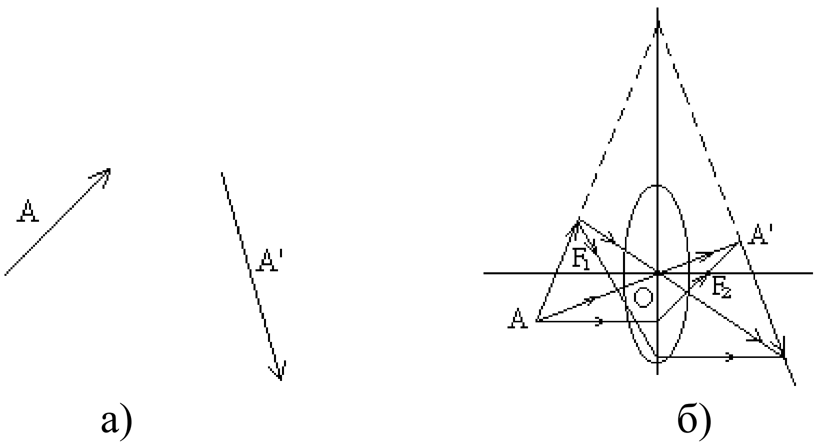


Рис. 165.

Розв'язок. Побудова зрозуміла з рис. 165 б.

Задача 247. Дано положення точок A і B та їх зображень A' і B' (рис. 166 а), отриманих за допомогою лінзи. Знайти побудовою положення лінзи та її фокусну відстань.

Відповідь: Побудова зрозуміла з рис. 166 б. Перетин прямих AB і $A'B'$ визначає оптичний центр O лінзи.

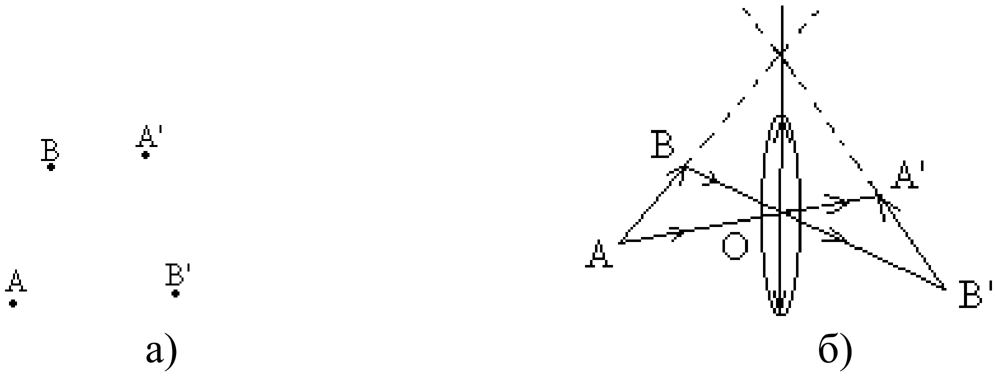
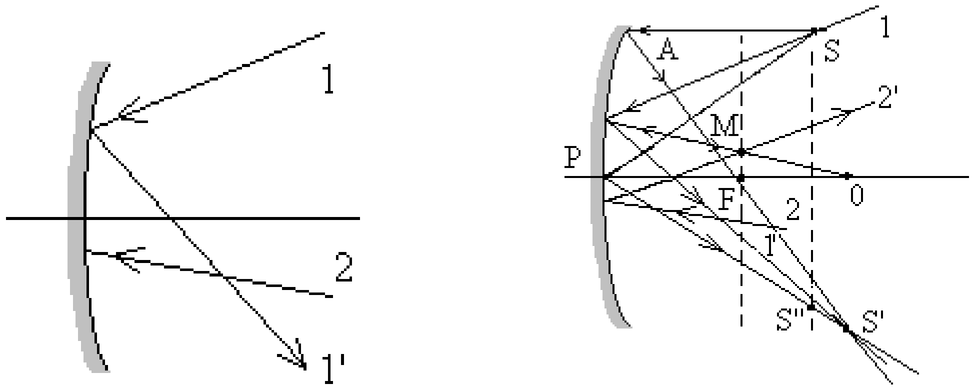


Рис.166.

Задача 248. Дано хід променя 1 після відбивання у вгнутому дзеркалі (рис. 167 а). Знайти напрямок променя 2 після відбивання.



а) б)

Рис.167.

Розв'язок: Спочатку знаходимо положення характерних точок дзеркала *F* і *O*. Візьмемо на промені 1 точку S і побудуємо їй симетричну S'' (рис. 169 б). Промінь *SP* після відбивання перетинає промінь $1'$ в деякій точці S', яка є зображенням точки *S*. Промінь *S,* паралельний головній оптичній вісі, перетинає останню в точці фокуса *F* після відбивання. Знаючи положення фокуса, можна визначити положення оптичного центру *O*. Проведемо паралельно до променя 2 побічну оптичну вісь, яка перетинається з фокальною площиною дзеркала в точці М. Промінь 2 після відбивання від дзеркала пройде через точку М.

Задача 249. Два плоских дзеркала утворюють двогранний кут $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, де n – ціле число. Точкове джерело світла *S* знаходиться між дзеркалами на однаковій відстані від кожного з них. Скільки зображень джерела *k* одержиться в дзеркалах ?

Відповідь: $k = \frac{360^0}{\varphi} - 1.$

Задача 250. На супутнику, що літає коловою орбітою на висоті *H*=200 *к*м від Землі, встановлено фотоапарат із фокусною відстанню об'єктива *F*=40 см. Роздільна здатність плівки, тобто мінімальний розмір деталей зображення, які можна розрізнити, дорівнює *a*=10 мкм. Який мінімальний розмір предметів на Землі, які можна розрізнити на плівці? Який допустимий час експозиції ?

Розв'язок. За умовою задачі можна розрізнити предмети, розмір зображення яких більший за a, тому $l \geq a\dfrac{H}{F} = 5$ м . За час експозиції t супутник і, отже, оптична вісь об'єктива повертаються на кут $\beta = 2\pi\dfrac{t}{T}$, де $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ – період обертання супутника. Зображення при цьому розмивається на величину βF. Це розмиття не має перевищувати a. Звідси $t = \dfrac{\beta}{2\pi}T \leq \dfrac{a}{F}\sqrt{Rg} \approx 0{,}02c$.

Задача 251. За допомогою зорової труби , що має об'єктив із фокусною відстанню $F_1 = 50$ см і діаметром d_1= 10 см та окуляр із фокусною відстанню F_2=2,5 см й діаметром d_2=0,5 см, дістали зображення Сонця на екрані на відстані b=20 см за окуляром. У скільки разів освітленість зображення більша за освітленість екрана прямими сонячними променями? Кутовий діаметр Сонця $\beta = 0{,}01$ рад.

Розв'язок. Розглянемо хід двох паралельних променів через зорову трубу. Щоб за допомогою окуляра можна було дістати зображення на екрані, первинне зображення, отримане у фокальній площині об'єктива, має міститися зліва від передньої фокальної площини окуляра на відстані $a = \dfrac{bF_2}{b - F_2}$ від окуляра. У цьому випадку через окуляр проходить не весь потік, що падає на об'єктив, а лише та його частина, яка припадає на центральну ділянку об'єктива діаметром $D = d_2\dfrac{F_1}{a}$. Діаметр первинного зображення Сонця βF_1, отже, діаметр зображення на екрані $d = \beta\dfrac{F_1 b}{a}$.Шукане відношення освітленостей знаходимо, порівнявши площі, на які падає один і той же самий потік:

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \frac{d^2{}_2}{\beta^2 b^2} = \frac{25}{4.}$$

Задача 252. Пояснити зворотній порядок розташування кольорів у першій (основній) і другій веселці.

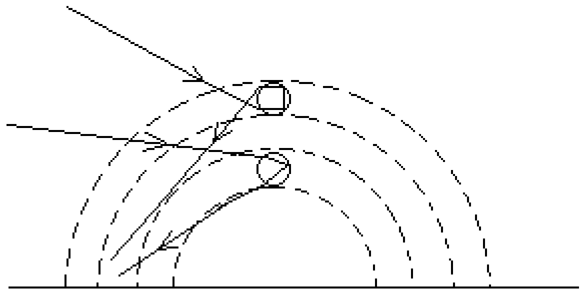


Рис. 168.

Розв'язок: Веселка виникає завдяки заломленню сонячних променів у дощових краплинах. При цьому внаслідок дисперсії світла відбувається розкладання сонячного світла в спектр. Якщо відбувається два заломлення і одне відбивання всередині краплини (рис. 168), то одержується перша (основна) веселка. В цьому випадку промінь, який вийшов з краплини і попав в око спостерігача, дає зображення спектру, витягнутого зверху вниз. Зовнішній край першої веселки червоний, внутрішній – фіолетовий. Кут між променями, що падають на краплину і виходять з неї, для червоних променів складає $42{,}5^{o}$, а для фіолетових – $40{,}5^{o}$.

Якщо в краплині відбувається два заломлення і два відбивання, то одержується друга веселка більшого діаметру, проте менш інтенсивна. Завдяки двом відбиванням всередині краплини в другій веселці спостерігається зворотній порядок кольорів. Кут між променями, що падають на краплину і виходять з неї, для червоних променів складає біля 50^{o}, а для фіолетових – $53{,}5^{o}$.

Задачі на інтерференцію світла ділять на дві групи: задачі, пов'язані з інтерференцією хвиль від двох когерентних джерел; задачі на інтерференцію в тонких пластинках. До останніх відносяться задачі на інтерференцію у плоскопаралельних і клиноподібних тонких шарах, окремим випадком яких є кільця Ньютона. При розв'язуванні з'ясовують причини появи різниці ходу між інтерферуючими променями, визначають величину цієї різниці, після чого у відповідності з умовою задачі записують умови максимуму чи мінімуму інтерференції. Ця умова і є основним рівнянням для визначення шуканої величини.

Більша частина задач на дифракцію світла передбачає розрахунок дифракції в паралельних променях від однієї щілини або на дифракційній гратці. Інколи дифракційна картина проектується на екран, який, як правило, розташований на порівняно великій відстані від дифракційної гратки. В таких випадках слід мати на увазі, що синуси кутів з достатнім ступенем точності можна замінити їх тангенсами. Крім того на лінзу падає паралельний пучок променів, відповідно, зображення дифракційної картини проектується в фокальну площину лінзи.
При розв'язуванні задач на світлові кванти варто мати на увазі, що взаємодія фотонів з речовиною підкоряється законам збереження енергії і імпульсу.
При визначенні швидкості фотоелектронів варто визначитись, яким є електрон: класичним чи релятивістським. Електрон вважається класичним, якщо його кінетична енергія $E_к$ значно менша енергії спокою E_0 $(E_0=m_0c^2)$. Якщо ця умова не виконується, то електрон слід вважати релятивістською частинкою і застосовувати до нього формули теорії відносності.

Задача 253. Монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм нормально падає на плоскопаралельні пластинки, які утворюють повітряний клин. Визначити кут α між пластинками, якщо ширина інтерференційних смуг, що спостерігаються у відбитому світлі, складає $\Delta h = 5 \cdot 10^{-4}$ м.

Розв'язок: В даному випадку інтерферують промені 1 і 2, відбиті від двох поверхонь повітряного клину (рис. 169).
Нехай точка A відповідає k-й інтерференційній смузі, а B – $(k=1)$-й, d_A і d_B – відповідні товщини повітряного клину. Враховуючи, що α дуже малий, можемо записати:

$$\alpha = \frac{d_B - d_A}{AB},$$

де $AB = \Delta h$.

$$\alpha = \frac{d_B - d_A}{\Delta h}.$$

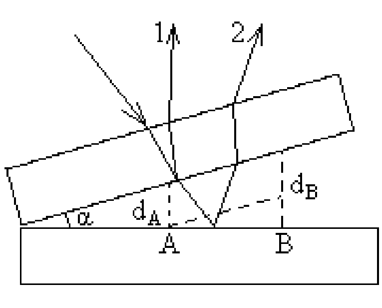


Рис. 169.

Запишемо умову максимуму для k –ї і $(k+1)$-ї смуг:

$$2d_A + \frac{\lambda}{2} = k\lambda; \quad 2d_B + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda,,$$

звідки

$$d_B - d_A = \frac{\lambda}{2}.$$

Тоді

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta h}\alpha = 5\cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'40''.$$

Задача 254. На дифракційну гратку, що має період d= $2\cdot 10^{-6}$ м, падає нормально світло, яке пройшло через світлофільтр, що пропускає хвилі довжиною від 400 до 500 нм. Чи будуть накладатися спектри різних порядків?

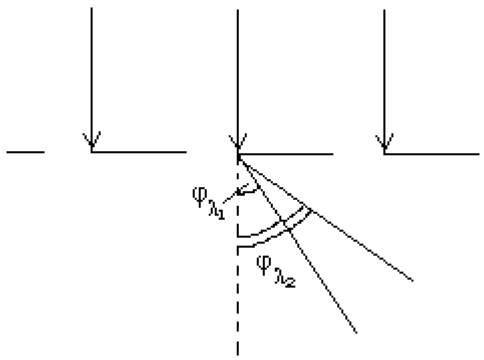


Рис. 170.

Розв'язок: Дотикання спектрів буде відбуватись у тому випадку, якщо кути дифракції для λ_1= 400 нм і λ_2= 500 нм для двох сусідніх порядків будуть рівними (рис. 170), тобто

$$\varphi^{(\lambda_1)}{}_{k+1} = \varphi^{(\lambda_2)}{}_{k}.$$

Запишемо умову максимуму дифракції:

$$k\lambda_2 = d\sin\varphi^{(\lambda_2)}{}_k; \quad (k+1)\lambda_1 = d\sin\varphi^{(\lambda_1)}{}_{k+1}.$$

Тоді умова накладання спектрів може бути записана наступним чином:

$$k\lambda_2 = (k+1)\lambda_1,$$

звідки

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 4.$$

Отже, частково будуть накладатись спектри 5-го і наступних порядків, Тому, щоб відповісти на запитання задачі, необхідно вияснити, чи можливо з допомогою даної гратки за таких умов одержати 5-й і наступні порядки спектрів.

Максимальному порядку *k* спектра відповідає $\varphi = 90^0$ $(\sin\varphi = 1)$. Отже

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda}.$$

Задача 255. На вузьку щілину нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла (рис. 171). Дифракційна картина проектується на екран за допомогою лінзи. Як необхідно змінити ширину щілини, щоб центральна світла смуга зменшилась в 2 рази:

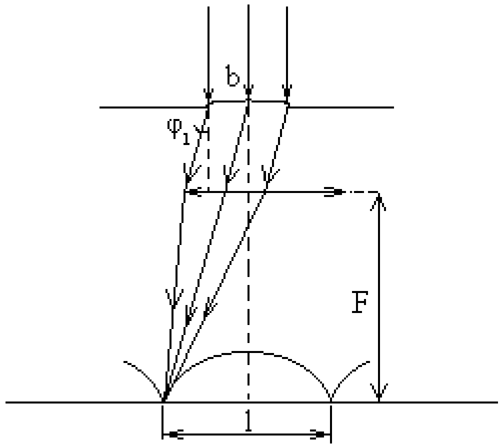


Рис. 171.

Відповідь: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{l_1}{l_2} = 2.$

Задача 256. Плоска світлова хвиля інтенсивність I=$2\cdot10^3$Вт/м^2 падає на плоске дзеркало з коефіцієнтом відбивання $\beta = 0{,}8$ під кутом $\varphi = 45^0$. Визначити світловий тиск на дзеркало.

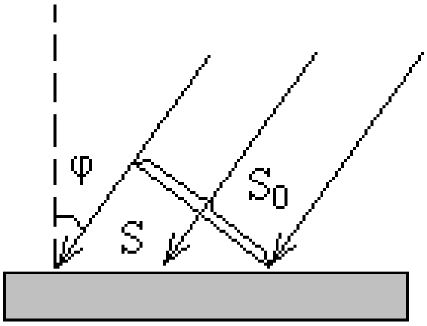
Розв'язок. Виходячи з визначення тиску і застосувавши до дзеркала другий закон Ньютона, можна записати:

$$p = \frac{F_n}{S} = \frac{F_n t}{St} = \frac{(\Delta K)_n}{St},$$

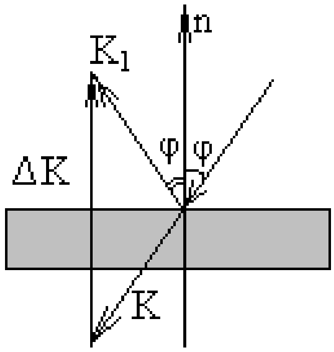
де $(\Delta K)_n$ – проекція імпульсу ΔK, повідомленого фотонами за час t дзеркалу, на напрямок нормалі до нього; S – площа освітленої поверхні. Величини S і $(\Delta K)_n$ залежать від кута падіння φ. Для знаходження цієї залежності, як видно з рис. 172 а,

$$S = \frac{S_0}{\cos\varphi},$$

де S_0 – площа поперечного перерізу світлового пучка.



а)



б)

Рис. 172.

На рис. 172 б зображено сумарні імпульси фотонів, що падають на дзеркало (K) і відбиті від нього (K'). Згідно закону збереження імпульсу

$$\Delta K = K' - K.$$

Переходячи до проекцій на напрямок *n*, одержуємо

$$(\Delta K)_n = K'_n - K_n = K'\cos\varphi + K\cos\varphi = (K' + K)\cos\varphi$$

Тоді $$p = \frac{(K' + K)\cos^2\varphi}{S_0 \cdot t}.$$

При φ=0 $p = p_0$, $p_0 = \dfrac{K' + K}{S_0 t}$.

З іншої сторони $p_0 = \dfrac{1}{c}(1+\beta)$,

отже $p = \dfrac{1}{c}(1+\beta)\cos^2\varphi = 6\cdot10^{-6}$ Па.

Задача 257. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією B=5·10^{-2} Тл по колу радіусом r=4·10^{-2} м. Знайти кінетичну енергію електрона.

Розв'язок. Розв'язок задачі зводиться до визначення швидкості або імпульсу електрона. Для цього запишемо рівняння руху електрона в магнітному полі. На електрон діє сила, перпендикулярна до вектора v. Модуль швидкості не змінюється, а тому залишається сталою і маса частинки. Другий закон Ньютона можна записати так:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = e\mathrm{v}B,$$

звідки $K=e\mathrm{v}B$.

Щоб виразити $E_к$ через K, необхідно вияснити якою частинкою слід вважати електрон: класичною чи релятивістською? Для цього знаходимо величину імпульсу:

$$K=e\mathrm{v}B=3{,}2\cdot 10^{-22}\ \text{кг·м/с},$$

Отже , $K>m_0c$, тому електрон – релятивістська частинка. Відповідно,

$$E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}-1\right); \quad K = \frac{m_0\mathrm{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}.$$

Виключивши v, одержимо

$$E_k = m_0c^2\left(\sqrt{1+\frac{K^2}{m_0{}^2c^2}}-1\right) = 4{,}48\cdot 10^{-14}\ \text{Дж}$$

Задача 258. Електрон розганяється в електричному полі з напруженістю E=3·10^{6} $В$/м. Визначити швидкість електрона через час t=10^{-9} с від початку руху. Якою була б швидкість електрона, якби його маса не залежала від швидкості?

Розв'язок. На електрон зі сторони електричного поля діє сила $F=eE$.

Запишемо рівняння руху електрона в формі

$$F=\frac{dK}{dt}=\frac{d(m\mathrm{v})}{dt}.$$

Враховуючи залежність маси від швидкості, останнє рівняння можна записати в такому вигляді

$$F=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathrm{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right).$$

При t=0 швидкість v=0. Тоді

$$Ft=\frac{m_0\mathrm{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}},$$

звідки

$$\mathrm{v}=\frac{Fct}{\sqrt{m_0{}^2c^2+F^2t^2}}=\frac{eEct}{\sqrt{m_0{}^2c^2+(eE)^2t^2}}=2{,}6\cdot10^8\ \text{м/с},$$

Якщо знехтувати залежністю маси від швидкості, то одержимо

$$\mathrm{v}_1=\frac{eEt}{m_0}=5{,}3\cdot10^8\ \text{м/с}$$

За такого результату $\mathrm{v}_1>c$, що суперечить другому постулату спеціальної теорії відносності.