Олімпіадні задачі з фізики

Принцип відповідності

План

1. Урахування критеріїв виродження різних теоретичних схем згідно принципу відповідності
2. Релятивістська та нерелятивістська області
3. Квантова та класична області
4. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

З погляду принципу відповідності:

Нова, більш широка, фізична теорія включає в себе стару як окремий частковий випадок

Отже, різними є закономірності опису поведінки об'єктів

Встановлення критеріїв виродження між такими теоретичними схемами

- **Нерелятивістська – релятивістська фізика**
- **Класична – Квантова механіка**
- **Класична – Статистична фізика**

Класифікація рухів об’єктів за типом області дослідження

- Класична область
- Релятивістська область
- Ультрарелятивістська область

Розмежування нерелятивістської та релятивістської областей

Аналіз формули Ейнштейна

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

Аналіз формули Ейнштейна

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$$

Розклад формули в ряд Тейлора за нескінченно малим параметром: $\dfrac{p^2}{m_0^2c^2} \to 0$

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = c\sqrt{m_0^2c^2\left(\frac{p^2}{m_0^2c^2} + 1\right)} = m_0c^2\sqrt{\frac{p^2}{m_0^2c^2} + 1} \cong$$

$$\cong m_0c^2\left(1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m_0^2c^2} + 1\right)^{-1/2}\Bigg|_{\frac{p^2}{m_0^2c^2}} \frac{p^2}{m_0^2c^2} + \ldots\right) \approx m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

У квазірелятивістському випадку:

Повну енергію об'єкта можна подати у вигляді суми двох незалежних доданків:

1) Енергії спокою: $E_0 = m_0 c^2$

2) Кінетичної енергії: $T = \dfrac{p^2}{2m_0}$

Критерії виродження формули Ейнштейна

1) Класична область:

$$m_0 c >> p \quad \text{або} \quad v \le 0{,}1c$$

2) Релятивістська область:

$$m_0 c \approx p \quad \text{або} \quad 0{,}1c < v < c$$

3) Ультрарелятивістська:

$$m_0 c << p \quad \text{або} \quad v = c$$

Приклад 1.

Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B} = 5 \cdot 10^{-3}$Тл уздовж кола радіусом $r = 4$ см. Знайти кінетичну енергію електрона.

Дано:

$\vec{B} = 5 \cdot 10^{-3}$Тл

$r = 4 \cdot 10^{-2}$ м

$E_{\text{к}} = ?$

Зауваження:

Доцільно з'ясувати якою частинкою слід вважати електрон, класичною (нерелятивістською) чи релятивістською?

Для порівняння магнітне поле Землі $\vec{B} = 5 \cdot 10^{-5}$Тл

Розв’язок задачі:

Для з'ясування області і характеру руху електрона за параметрами вихідних величин в умові задачі:

Порівняємо імпульси p **і** m_0c^2

На електрон в магнітному полі діє сила Лоренца $\vec{F} = e\left[\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}\right]$

перпендикулярна до його швидкості $\vec{v}$, при цьому рух частинки викривлюється до колової траєкторії, модуль швидкості не змінюється, сталою є і маса частинки, тоді:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = e\mathrm{v}B, \qquad p = erB$$

Розв’язок задачі:

Обраховуємо імпульси електрона у магнітному полі:

$$p = erB = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 3{,}2 \cdot 10^{-23}$$ кг·м/с

$$m_0 c = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8} = 27{,}3 \cdot 10^{-23}$$ кг·м/с

Отже, $p < m_0 c$,

електрон – квазірелятивістська частинка.

У квазікласичному наближенні: $E = m_0 c^2 + E_k$

У загальному випадку: $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$

Тоді

$$E_k = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^{\,2} c^2}} - 1 \right), \quad E_k = 5{,}65 \cdot 10^{-10}$$ Дж

Встановлення критеріїв виродження між класичною та квантовою фізикою

Напівкласична теорія Н. Бора **дозволяє**

- розв'язати за допомогою класичних закономірностей задачу про атом гідрогену
- встановити умови, за яких квантові закономірності переходять у класичні

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга **дозволяють**

- узгодити корпускулярні і хвильові властивості об’єктів дослідження
- встановити межі застосовності до них понять класичної механіки
- виконувати прості напівкільнисні оцінки явищ мікросвіту

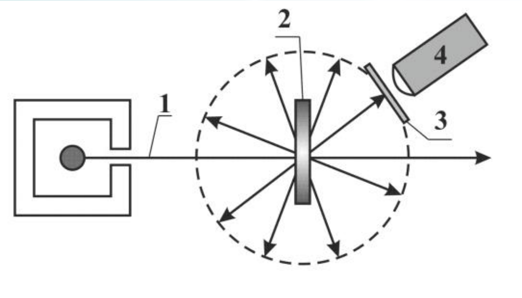
Аналіз моделі атома гідрогена в напівкласичній теорії Н. Бора

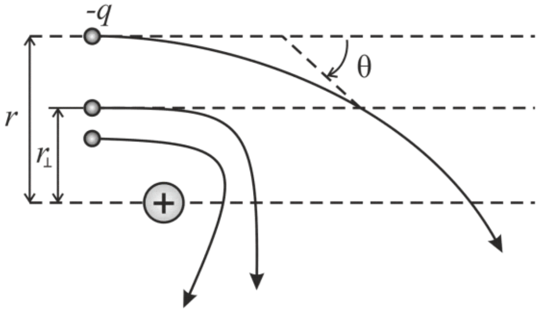
Спроба пояснити з погляду класичної фізики явища мікросвіту та розв'язати низку суперечностей між квантовими та класичними уявленням про мікросвіт.

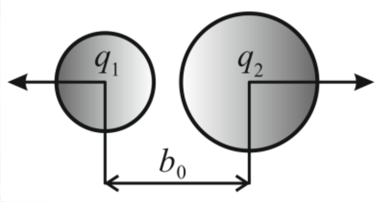
Передумови – низка проблем:

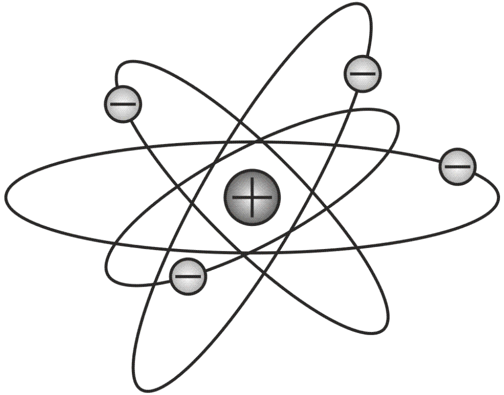
1. *Проблема стабільності атомів*
2. *Атом у незбудженому стані не випромінює електромагнітних хвиль*
3. *Неспроможність класичної фізики пояснити закони випромінювання абсолютно чорного тіла*

Досліди і ідеї Резерфорда (1911)









Теорія Н. Бора (1913)

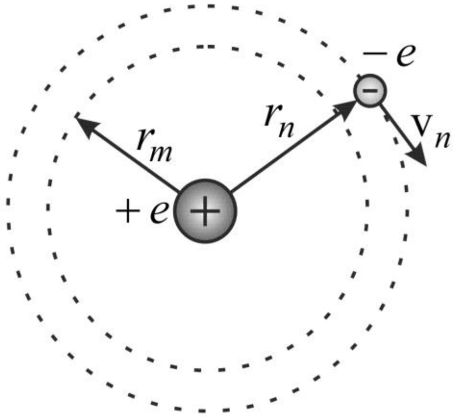
Постулати:

1. Існують стаціонарні стани атома, в яких його енергія не змінюється і атом її не випромінює і не поглинає:

$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n = \mathrm{const}$$

2. Випромінювання або поглинання енергії атомом відбувається під час стрибкоподібного переходу з одного стаціонарного стану в інш

$$\varepsilon_\phi = E_m - E_n = \hbar\omega$$



Правило відбору:

$$m_e \mathrm{v}_n r_n = n\hbar$$

Користуючись законами класичної механіки і постулатами Бора легко визначити

- Радіус і швидкість обертання електрона на n –орбіті:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2 \qquad \mathrm{v}_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}$$

- Повну енергію електрона на n –орбіті:

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}$$

- Отримати квантову формулу Бальмера-Рідберга:

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} = \frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

- Встановити умови переходу квантових закономірностей в класичні, як окремий частковий випадок: великі значення квантових чисел

Визначення критеріїв переходу від квантових закономірностей до класичних

- Визначаємо частоту обертання електрона

$$\omega_{кл} = \omega_{об} = \frac{v_n}{r_n} = \frac{m_e e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^3 n^3}$$

- Якщо припустити, що у формулі Бальмера-Рідберга, що $m = n + 1$, де $n < m$,
- тоді:

$$\omega_{mn} = 2\pi R_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \qquad R_0 = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3}$$

-
- за великих квантовых чисел $n \gg 1, n \to \infty$,
- $$\lim_{n\to\infty} 2\pi R_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \cong 2\pi R_0 \frac{2}{n^3} \qquad \omega_{кв} \approx \omega_{кл} = \frac{m_e e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^3 n^3}$$

СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Співвідношення невизначеностей

Наслідок спроб застосувати класичні поняття до опису поведінки квантових об’єктів.

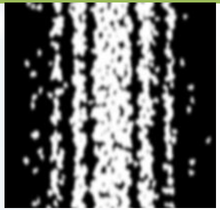
Причина:

Корпускулярно-хвильовий дуалізм

Вивчення співвідношень невизначеностей Гейзенберга

***Факти:* Дифракція Фраунгофера**

фотонів



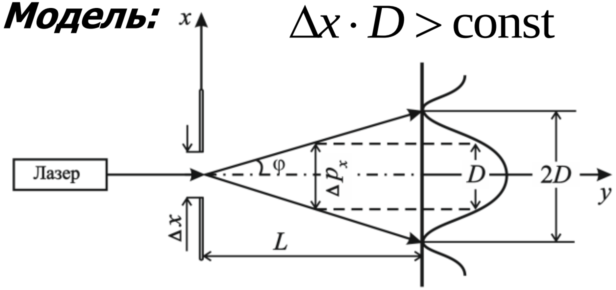
електронів

Проблема. Матерія на мікрорівні проявляє одночасно хвильові та корпускулярні властивості, що з точки зору класичних уявлень не піддається обґрунтуванню.

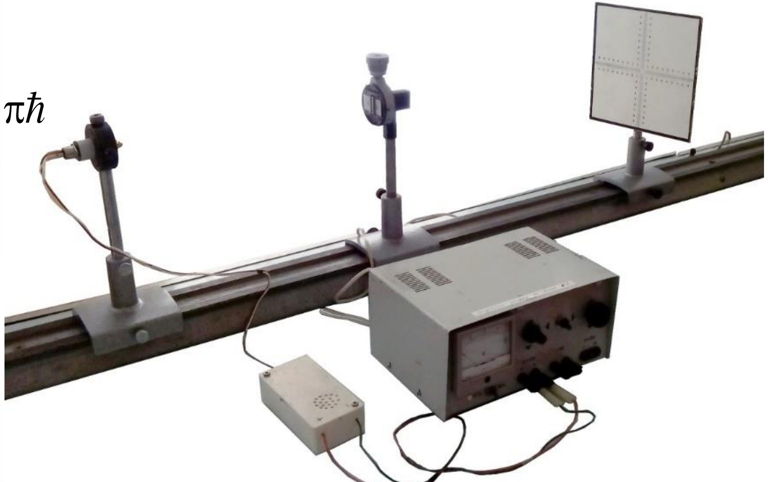
***Гіпотеза*:** співвідношення $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar$ невизначеностей Гейзенберга дозволяють узгодити корпускулярно-хвильовий дуалізм для фотонів

Модель:

$$\Delta x \cdot D > \text{const}$$

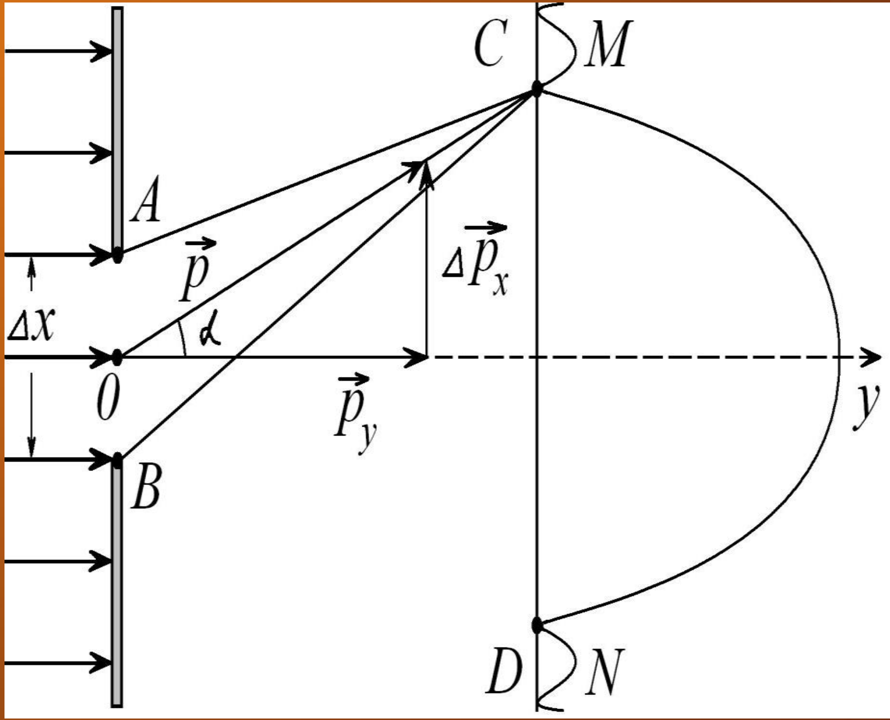


Експеримент:



Приклад: *потік фотонів через вузьку щілину*

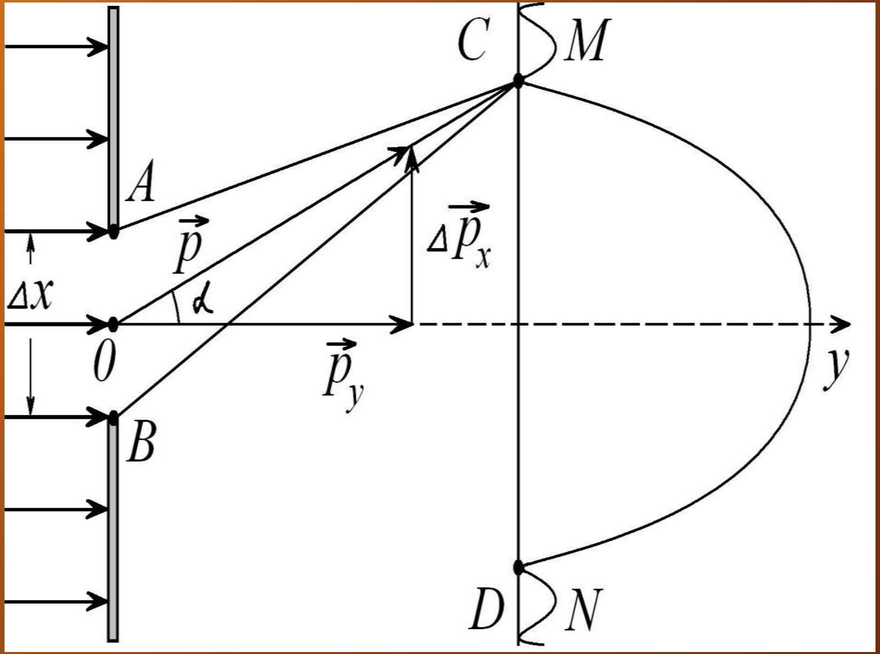
- На непрозорий екран з вузькою щілиною налітає потік фотонів.
- Зліва від екрану $AB = \Delta x$ кожний з фотонів має імпульс $\vec{p}$, вздовж OY



Зліва від екрана

- Кожний з фотонів має точні значення імпульсу $p_y = p$,
- а тому $\Delta p_y = 0$
- Але координати електронів можуть бути довільними, тобто
- $-\infty < y < +\infty$
- Тоді $\Delta y = \infty$,
- а $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$

Співвідношення невизначеностей між координатою і імпульсом

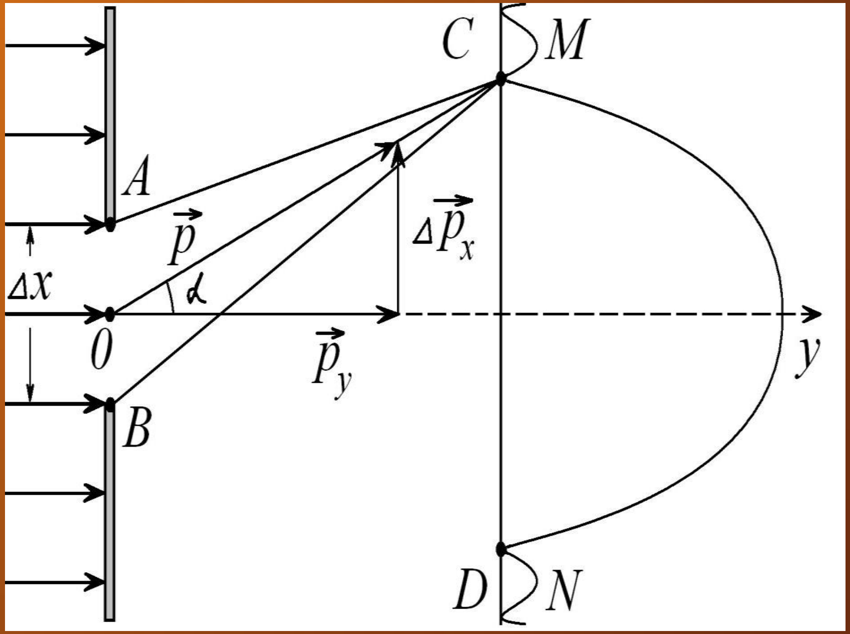


Фотон проходить через щілину і знаходиться всередини щілини AB, тобто $\Delta x = AB$

- Зменшуючи AB, можна з напряму виміряти X з заданою точністю
- *(це лише припущення, яке складно реалізувати).*
- За умови, коли розміри щілини будуть порядку дебройлівської довжини хвилі, тобто $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{p}$,
- має місце дифракція фотонів.

Аналіз дифракційної

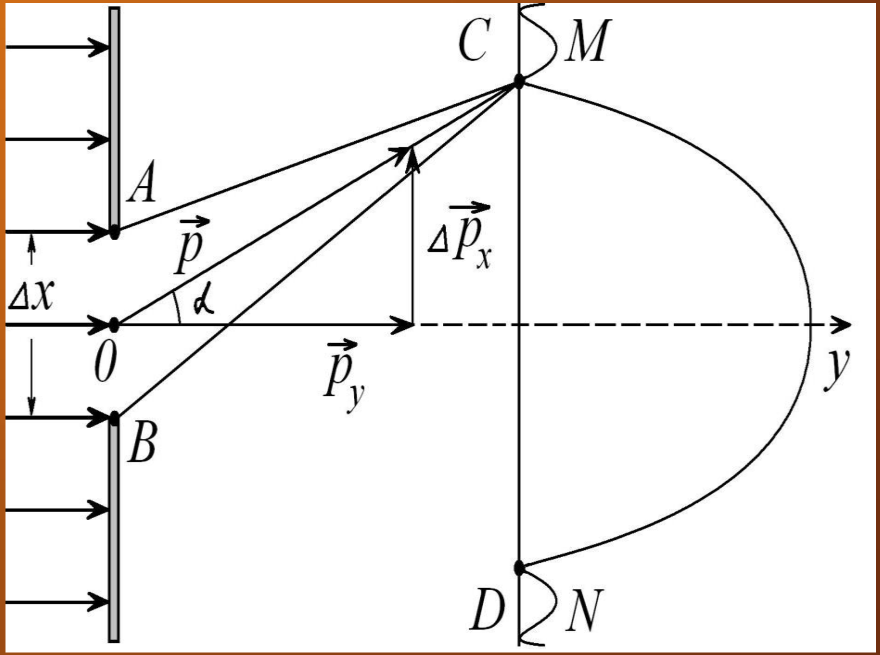
- Симетричність відносно вісі OY головного максимуму і ряду вторинних максимумів;
- До щілини всі фотони рухались вздовж осі OY ;
- При відхиленні від попереднього напряму одержують приріст імпульсу Δp_x вздовж вісі OX .



Будемо вважати, що

- уся дифракційна картина має ширину від нижнього першого мінімуму до відповідного верхнього, тому

$$\Delta p \approx p\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx p \sin \alpha$$



Перетворення:

Враховуючи, що:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

- Отримаємо

$$\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\sin\alpha$$

- Умова дифракції

$$\Delta x \sin\alpha = k\lambda \ \ (k = 1)$$

- Тоді

$$\Delta x \sin\alpha = \lambda$$

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \approx 2\pi\hbar$$

Якщо враховувати і вторинні максимуми, тоді $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi\hbar}$

- тобто ми одержали співвідношення невизначеностей Гейзенберга (одну з його форм)
- Учені придумали цілий ряд таких мисленнєвих експериментів (визначення положення електрона за допомогою мікроскопа, визначення його імпульсу при відбиванні від кристала тощо), які завжди працюють у відповідності до співвідношення невизначеностей

Інші співвідношення невизначеностей

- Окрім співвідношень між координатами і імпульсами:
- $$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$ $$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$$ $$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$$
- існує співвідношення між енергією і часом.
- **Можна довести**, що ***якщо частинка деякий час*** Δt ***перебувала в нестаціонарному стані, то енергія цього стану може бути визначеною лише з точністю*** ΔE.

Для обґрунтування враховується концепція хвиль де Бройля

- **Цуг хвиль** де Бройля (група хвиль) **не є монохроматичною**, а містить набір частот $\Delta\omega$
- Які визначаються з точністю до
- $$\boxed{\Delta\omega\Delta t \geq 1}$$
- Якщо врахувати, що

$$E = \hbar\omega \Rightarrow \Delta E = \hbar\Delta\omega$$

- Тоді маємо: $\boxed{\Delta E\Delta t \geq \hbar}$

Приклад: Оцінити основний стан осцилятора за допомогою невизначеностей Гейзенберга

- Скористатись співвідношеннями невизначеностей Гейзенберга

$$\boxed{\overline{\Delta x^2}\cdot\overline{\Delta p_x{}^2}\geq\frac{\hbar^2}{4}}$$

- де $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$

Враховується концепція хвиль де Бройля

- **Цуг хвиль** де Бройля (група хвиль) **не є монохроматичною**, а містить набір частот $\Delta\omega$
- Ураховуємо, що $\boxed{\Delta\omega\Delta t \geq 1}$
- Якщо врахувати, що

$$E = \hbar\omega \Rightarrow \Delta E = \hbar\Delta\omega$$

- Тоді маємо: $\boxed{\Delta E\Delta t \geq \hbar}$

Розглянемо кілька завдань:

1) Якщо врахувати статистичну поведінку мікрооб'єктів, тоді співвідношення невизначеностей воно має більш точний вигляд

$$\boxed{\overline{\Delta x^2}\cdot\overline{\Delta p_x^{\,2}} \geq \frac{\hbar^2}{4}}$$

де,

$$\overline{\Delta p_x^{\,2}} = \overline{\left(p_x - \overline{p_x}\right)^2} \qquad \overline{\Delta x^2} = \overline{\left(x - \overline{x}\right)^2}$$

2)
$$\overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2 - 2\bar{x}x + \bar{x}^2} =$$
$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

- тому:

$$\boxed{\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\boxed{\overline{\Delta p_x^2} = \overline{p_x^2} - \overline{p_x}^2}$$

Можна обрати такий початок відліку

- щоб для x і Δp_x
- $\boxed{\overline{x} = 0}$ і $\boxed{\overline{p_x} = 0}$

тому $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2}$ і $\overline{\Delta p_x{}^2} = \overline{p_x{}^2}$,
і співвідношення невизначеностей буде мати вигляд

$$\boxed{\overline{x^2} \cdot \overline{p_x{}^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}}$$

3) Для класичного гармонійного осцилятора

- **Повна енергія** дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій:

$$\boxed{E = \frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \frac{kx^2}{2}}$$

- причому $k = m\omega^2$
- де ω – частота коливань осцилятора

У квантовій механіці

- одночасно точні значення для x і p_x
- не існують, а існують і вимірюються
- $\overline{x}$ і $\overline{p_x}$.
- Тому формула для повної енергії квантового осцилятора має вигляд:

$$\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2m} + \frac{k\overline{x^2}}{2} = \frac{\overline{p_x^2}}{2m} + \frac{m\omega^2\overline{x^2}}{2}$$

$$\boxed{\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2m} + \frac{m\omega^2\,\overline{x^2}}{2}}$$

- але $$\overline{p_x^2}\cdot\overline{x^2} = \frac{\hbar^2}{4}$$
- тому $$\overline{x^2} = \frac{\hbar^2}{4\overline{p_x^2}}$$
- отже $$\boxed{\overline{E} = \frac{\overline{p_x^2}}{2m} + \frac{m\omega^2\hbar^2}{8\overline{p_x^2}}}$$

Основний стан квантового осцилятора –

- це стан з найменшою енергією.

  Умова мінімуму енергії: $\boxed{\dfrac{d\overline{E}}{d\overline{p_x^2}} = 0}$

- Отже

$$\frac{d}{d\overline{p_x^2}}\left(\frac{\overline{p_x^2}}{2m} + \frac{m\omega^2\hbar^2}{8\overline{p_x^2}}\right) = \frac{1}{2m} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{8\left(\overline{p_x^2}\right)^2}$$

Тоді

$$\frac{1}{2m}-\frac{m\omega^2\hbar^2}{8\left(\overline{p_x^2}\right)^2}=0 \quad \Rightarrow$$

$$4\left(\overline{p_x^2}\right)^2=m^2\omega^2\hbar^2 \quad \Rightarrow$$

$$\overline{p_x^2}=\frac{m\omega\hbar}{2}$$

Отже,

- коли $\boxed{\overline{p_x^2} = \frac{m\omega\hbar}{2}}$,
- то енергія осцилятора буде мінімальною

$$\overline{E}_{\min} = \frac{\overline{p_x^2}}{2m} + \frac{m\omega^2\hbar^2}{8\overline{p_x^2}} = \frac{m\omega\hbar}{4m} + \frac{m\omega^2\hbar^2 \cdot 2}{8m\omega\hbar} = \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

- Це так звана **нульова енергія осцилятора**, яку у нього відібрати неможливо:

$$\boxed{\overline{E}_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2}}$$

- Цей означає: ***квантовий осцилятор має запас енергії навіть за*** $T = 0$
- Варіант теоретичного обґрунтування третього закону термодинаміки про неможливість досягнення абсолютного нуля температур
- Цей факт дістав експериментальне підтвердження

Прості приклади:

Приклад 1.

- Ракета масою 10^3 кг обертається навколо землі по коловій орбіті.
- Радіус орбіти 6500 км .
- Швидкість ракети $8\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$.

- **З якою точністю можна задати радіус і швидкість?**

Приклад 1

Розв'язок:

- Ракета рухається по коловій орбіті, а тому її швидкість в кожній точці траєкторії перпендикулярна до радіусу,
- отже $\text{v}_n = 0$ і тому $\Delta \text{v}_n = 0$

$$\boxed{\Delta p_\tau \Delta r \approx \hbar}$$

- Нехай $\Delta r = 1A^\circ = 10^{-10}$ м
- (задаємо діаметр атома)

Приклад 1

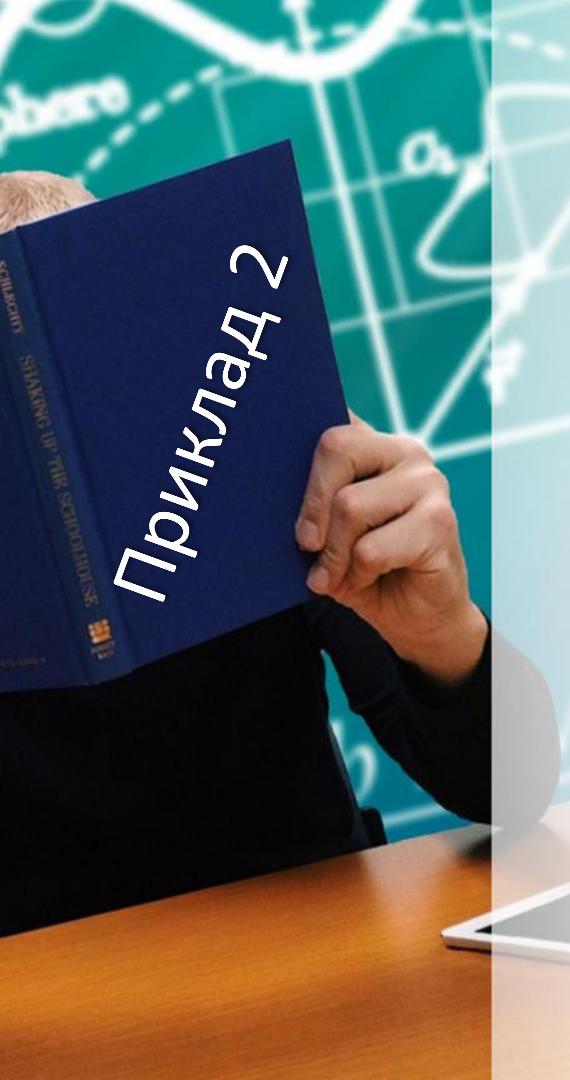
Тоді, $$\Delta p_\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta r} \approx 10^{-24}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$$

-
- $$\Delta \mathrm{v}_\tau = \frac{\Delta p_\tau}{m_p} \approx 10^{-27}\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

- де $m_p = 10^3\,\text{кг}$ (за умови)

Але $\mathrm{v}_p >> \Delta \mathrm{v}_\tau$

- Отже, при аналізі руху макротіл співвідношення неоднозначностей не відіграє жодної ролі.
- Цими невизначеностями ($\Delta \mathrm{v}, \Delta r$) можна знехтувати і вважати, що **розв‘язок задачі може бути отриманий з будь-якою наперед заданою точністю.**



Приклад 2.

Електрон рухається в бетатроні по коловій орбіті радіусом $2{,}5\,\text{м}$ і з швидкістю, що складає $99\,\%$ швидкості світла і

$$v = 0{,}99\,c = 2{,}97\cdot 10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

- **З якою точністю можна задати радіус орбіти та швидкість електрона?**

Врахуємо, що $m = m(\mathrm{v})$

- Тобто

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}\right)}} =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{0{,}01\cdot 1{,}99}} = \frac{m_0}{1{,}41\cdot 0{,}1} \approx 7{,}1\, m_0$$

Задаємо невизначеність радіуса орбіти $\Delta r = 0{,}05\,\text{м}$

- Тоді невизначеність радіального складника швидкості:

$$\Delta \mathrm{v}_r \approx \frac{\hbar}{m\Delta r} = \frac{10^{-34}}{7{,}1 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}3\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

- Ця величина порівняно з $2{,}97 \cdot 10^{8}\,\text{м/с}$ дуже мала і нею можна знехтувати.
- Таким чином, при русі електрона по макротраєкторії невизначеність $\Delta \mathrm{v}_r$ жодної ролі не відіграє **(задачу можна розв’язувати класичними методами з урахуванням релятивіських поправок).**

Приклад 3.

- Розглянемо рух електронів в атомі.
- Радіус атома $r \approx 0{,}5A^{\circ} = 5 \cdot 10^{-11}\text{м}$, а орбітальна швидкість $\text{v} \approx 10^{6}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$
- Релятивістськими ефектами можна знехтувати, бо $\text{v} << c$ ($c = 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$), а тому $\boxed{m = m_0}$

Оцінка результату:

- Нехай невизначеність радіуса рівна 1% радіуса орбіти електрона:

$$\Delta r = 0{,}01r = 5 \cdot 10^{-13}\,\text{м}$$

- Отже: $\Delta \mathrm{v}_r \approx \dfrac{\hbar}{m\Delta r} = 2{,}2 \cdot 10^{8}\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

- (це майже швидкість світла).

Висновок:

- Отже, **ніякої мови про рух електрона по орбіті вести не можна, бо швидкість його руху повністю не визначено,** це свідчить про те,
- що співвідношення невизначеності

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

- в атомі працює.

ДЯКУЄМО ЗА УВАГУ!